

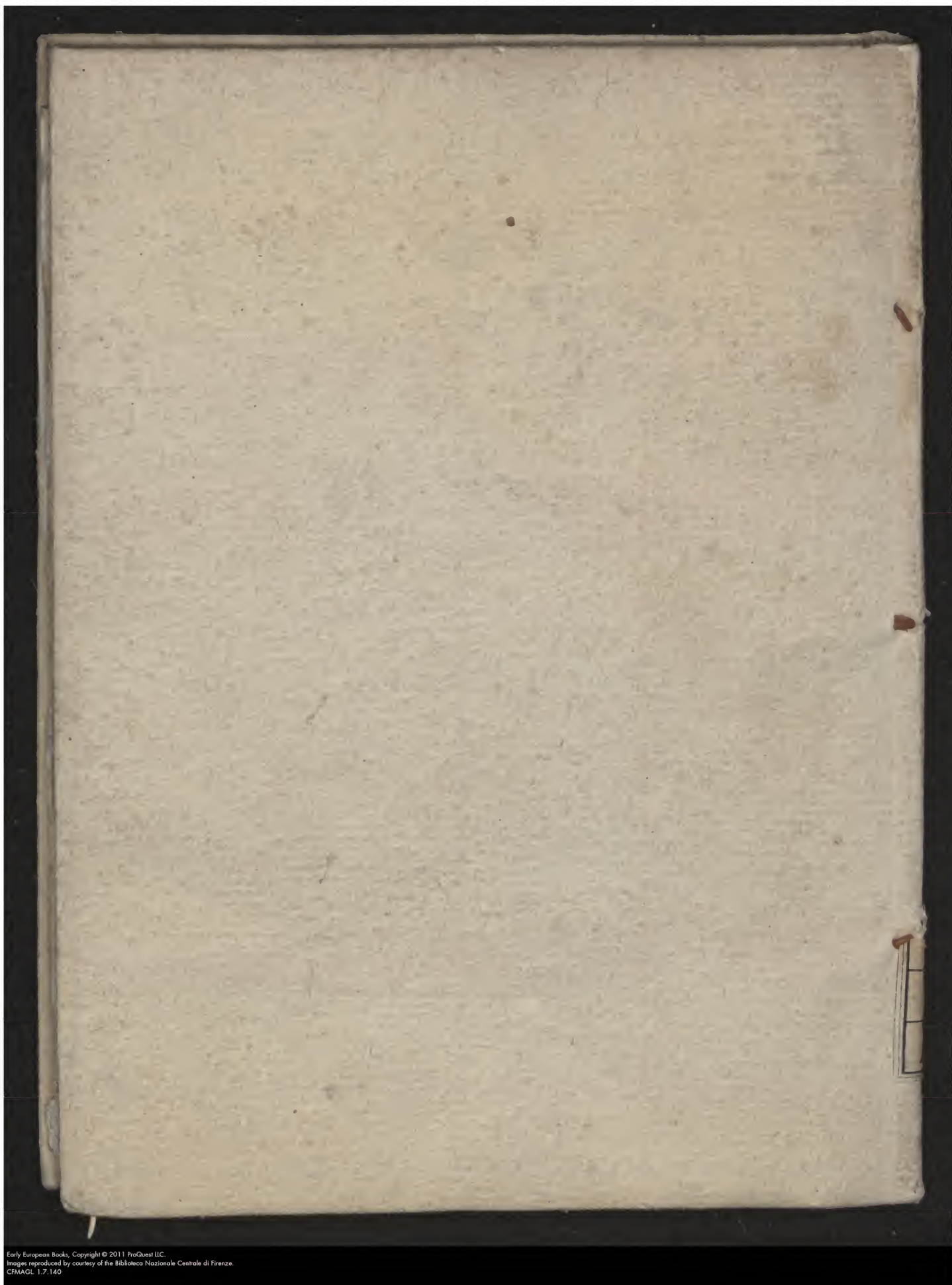
XI  
CHRISTO  
PH

1705

4



Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CMAOL 1.7.140

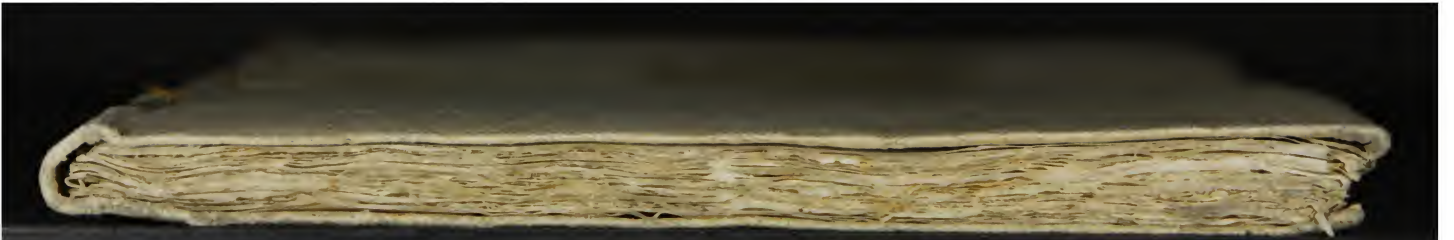






Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CFMAGL 1.7.140





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CFMAGL 1.7.140



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CfMAGL 1.7.140

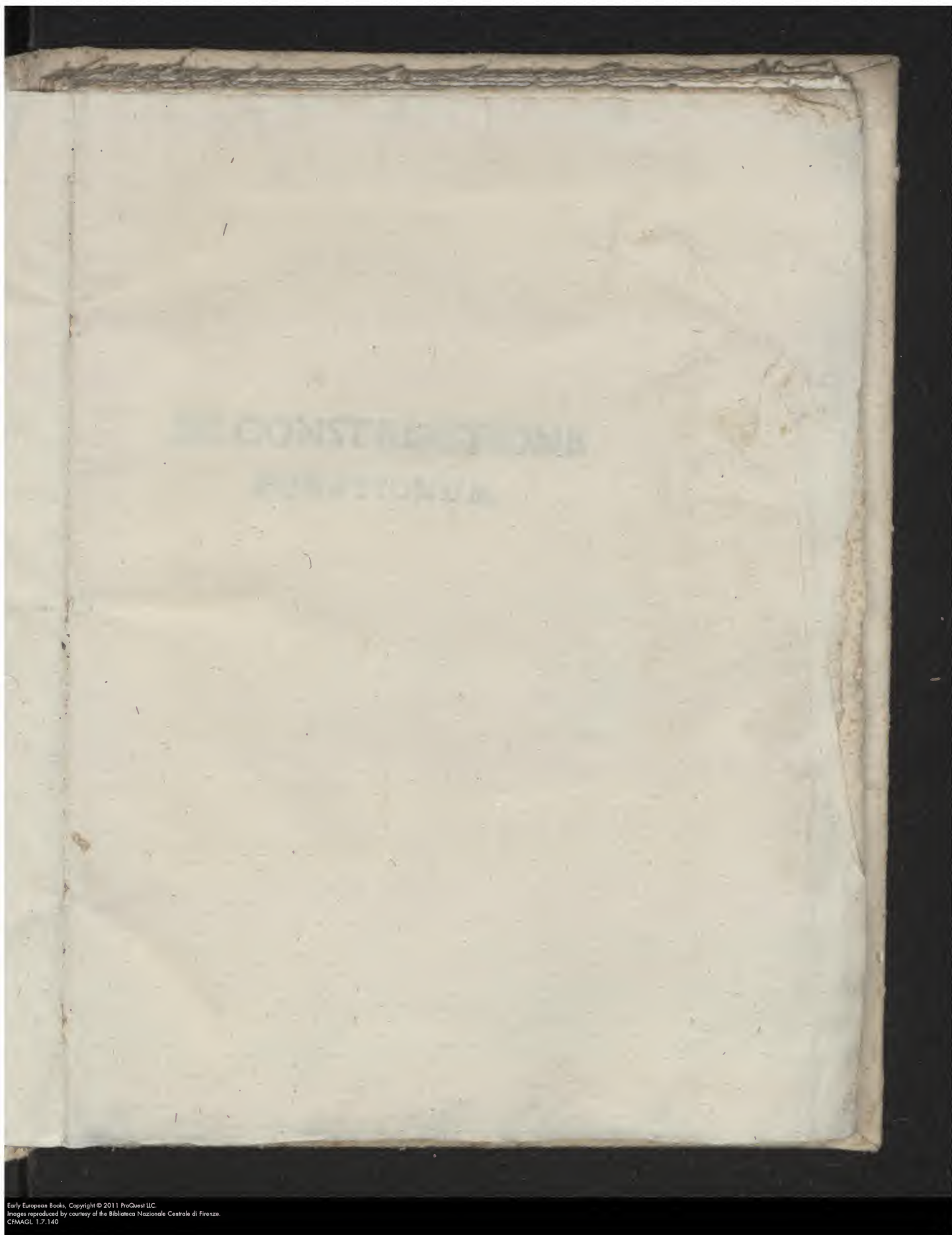
1. 7. 140

1 H. 7



XI  
CHRISTOPH









DE CONSTRUCTIONE  
ÆQUATIONUM.



DE CONSTRUCTION  
MATHÉMATIQUE



HYACINTHI  
CHRISTOPHORI

J. C. Neapolitani.

DE CONSTRUCTIONE  
ÆQUATIONUM.

Libellus.



NEAPOLI;

Ex Typographia Josephi Roselli. M. DCC.

---

*Superiorum licentia.*

HYACINTH

1700

DE COLLECTIONE

1700







Illustris. Viro literarum omnium ornatissimo

**D. FRANCISCO MARCIANO**

*Supremi Italiae Senatus apud Catholicum Regem  
Regenti meritissimo.*

HYACINTHUS CHRISTOPHORUS S. P. D.



Um in vivis agebat  
Bernardus Pater meus,  
plurimorum Virorum  
Illustrium hujus Civi-  
tatis, ac præsertim Se-  
natorii Ordinis, amici-  
tiam sibi comparavit;  
eorum autem, qui magis illam coluerunt,  
& amplexati sunt, unus præ cæteris tu  
fuiſti Illuſtriſſimè, & Nobiliſſimè Vir, qui  
nedùm familiariter cum eo longo tem-  
pore egiſti, dum recta, ac firma valetu-  
dine



dine utebatur, & plurima in ipsum beneficia contulisti, verum, dum aduersa conflictaretur, minimè amoris, & benevolentiae erga illum oblitus, pluries domi aegrotantem invisisti, multam diei partem, docto sermone trahens; Præterea, postquam ultimum clauserat diem, non destitisti, ubi res tulerat, ejus memoriam honorificis encomiis cohonestare, & memor propensæ voluntatis, & benevolentiae, quam in ejus Patrem gesserunt Regentes integerrimi Marcellus, & Io: Franciscus Marcianus Pater, & Avus tuus, Viri Iurisprudentiae studio, & literis omnibus insignes, libenti, gratoque animo nos excepisti, nostrisq; rebus subventurum pollicitus, cum te charissimi Patris interitu, mærentes adivimus. Tot, tantisque igitur beneficiis devinctus, cum tibi eas, quas optarem vices, rependere nequeam, in animi mei, ac observantiae testimonium, opusculum hoc *De Constructione Aëuationum*, in quo explicatur metho-

rhodus construendi problemata omnia,  
duarum curvarum interfectione secun-  
dum proprias sedes, cujuscunque generis  
ea sint ( res apud veteres , & recentiores  
Mathematicos diu desiderata, ut testis est  
Pappus , & Cartesius ) tuo nomini inscri-  
ptum, in lucem prodire , & in hoc Patris  
mei vota adimplere volui , cui si sors de-  
disset publicæ luci exponere Vitas Illu-  
strum Virorum, qui cum Io: Ioviano Pon-  
tano Neapoli floruerunt , unà cum Tra-  
ctatu *de Ortu , & Progressu Academia* ,  
non alii, quàm tuo nomini sacrasset . Cæ-  
terum , prætermisissis officiis , quibus me,  
Patremque meum maximòpere demeri-  
tus es, si aliquis mihi deligendus erat, cui  
esset familiæ splendor, & nobilitas, summa  
dignitas , humanitas, & his omnibus præ-  
stantior virtus , nemo erat quidem futu-  
rus, ut delectus etiam inter paucos habe-  
retur , quem tibi in hac laudis contentio-  
ne , conferrem ; Nam tu clarissimis or-  
tus natalibus , præter Iurisprudentiæ stu-  
dium,



dium , quod te evexit ad tam clarum , &  
conspicuum munus , tanta es humanita-  
te , ac virtute præditus , tantoque amore ,  
& propensione erga mathematicas , philo-  
sophicasque disciplinas teneris , ut nemo  
sit , quin de te magnificè sentiat , ac loqua-  
tur . Superest jam , ut hilari vultu , munu-  
sculum hoc , & si tuis meritis impar , sal-  
tem uti non dubium mei in te amoris ,  
ac observantiæ pignus excipias , atque po-  
tius spectes quod efficere optassem in-  
promerenda tua gratia , quàm id , quod  
assequutus sim . Vale , & Deus ad Pa-  
triæ bonum te diu incolumem servet .



EMINENTISS. , E REVERENDISS. SIG.

**I**L Dottor Giacinto di Cristofaro, supplicando espone a V. Em. , come desidera dare alle stampe un' Operetta matematica intitolata *De Constructione Equationum Libellus*, La supplica per tanto di commettere la censura di essa a chi meglio a quella parerà, e l'haverà a grazia. ut Deus.

*Reverendus Pater Nicolaus Parthenius Giannettasius Soc. Jesu, videat, & in scriptis referat, die 12. Decembris 1698.*

JO: A. SILIQUINUS VIC. GEN.

*D. Ianuarius de Auria Can. Deput.*

EMINENTISS. , E REVERENDISS. SIG.

**L**Egi librum, cui titulus est *De Constructione Equationum Libellus*, in quo nihil animadverti, quod vel Fidei, vel moribus dissonum sit: imò auctum opus, & utile, quodque è Republica sit in lucem prodire. Die 6. Martii 1699.

Emin. Tuæ Re v.

Addictissimus Famulus

*Nicolaus Parthenius Giannettasius Soc. Jesu.*

*Attenta superscripta relatione Reverendi Patris Revisoris, quod potest imprimi, Imprimatur, die 14. Maii 1699.*

JO: A. SILIQUINUS VIC. GEN.

*D. Ianuarius de Auria Can. Dep.*

ECCELLENTISS. SIGNORE.

**I**L Dottor Giacinto di Cristofaro, supplicando espone a V. Ecc. , come desidera dare alle stampe un' Operetta matematica intitolata *De Constructione Equationum Libellus*, La supplica per tanto di commettere la censura di essa a chi meglio a quella parerà, e l'haverà a gratia. ut Deus.

*V. I. D. Joseph Lucini videat, & in scriptis referat.*

GASCON R. ANDREAS R. ANDREASSI R.

GVERRERO R. MERCADO R.

Provisum per S.E. Neap. 7. Aprilis 1699.

*Maffellonus*

ECCELLENTISS. SIGNORE.

**P**Er ubidire a' comandamenti di V. Ecc. hò letto il libro intitolato *De Constructione Equationum Libellus*, e in quello non hò incontrato nulla, che sia contra la Regal Giurisdizione, e perciò si potrà dare alle stampe.

Di V. Ecc.

Umiliss. , e Divotiss. Servidore.

*Giuseppe Lucina.*

*Visa supradicta relatione imprimatur, & in publicatione servetur Regia Pragmatica.*

GASCON R. ANDREAS R. ANDREASSI R.

GVERRERO R. MERCADO R.

Provisum per S.E. Neap. 13. Maii 1699.

*Maffellonus*

b

Pag.

Pag.	lin.	pro	lege
5	8 & 10	$\frac{1}{2} \frac{qpx}{a}$	$\frac{1}{2} \frac{qp}{a} x$
23	20	$-\frac{1}{2} q + a$	$-\frac{1}{2} q + \frac{1}{2} a$
48	3	$\frac{f^2}{a} x^2$	$\frac{f}{a} x^2$
55	17	cecutire	cœcutire
80	22	eritque	erit
83	11	propositæ	propositæ
84	17	coercetur	coercentur





## HYACINTHUS CHRISTOPHORUS

Lectori.



Uibus suafus rationibus, præter animi  
mei ſententiam, ad hæc ſcribenda me  
accinxerim, explicare non importu-  
num amice Lector putavi. Bernardus  
Chriſtophorus pater meus, vir planè  
eruditus, multa ingenii fui monimenta typis mandare  
parabat, quæ concinnaverat per otium, quod nanci-  
ſci potuit inter domeſticas curas, & irrequietum  
Jurisprudentiæ exercitium, cui non contemnenda no-  
minis celebritate vacavit; inter ea erat ad Patriam,  
& nominis fui ornamentum opus illud diu deſide-  
ratum

Academia Pontani

ſive

Vitæ Illuſtrium Virorum, qui cum

Jo: Joviano Pontano Neapoli

Floruer.

In eo celebribus factis referta tradebantur vitæ  
Academicorum, non tam oratorio, quam hiftoricoge-  
nere perſcriptæ, ſcilicet Antonii Panormita, qui pri-

b a mus



mus Neapoli conventum literatorum instituit, Joannis Joviani Pontani, ex quo nomen Academia desumpsit, Aetii Synceri Sannazarii, Aegidii S. R. E. Cardinalis Viterbiensis, Gabrielis Altilii, Petri Gravinae, Alexandri ab Alexandro, Scipionis Capycii, Francisci Aelii Marchesii, Hieronymi Borgiae, Hieronymi Carbonis, Andreae Matthaei Aquivivi Hadriensium Ducis, Trajani Cabanilii Montella Comititis, Petri Gulini, sive Compatris, Petri Summonzii, Michaelis Marulli Byzantini, Puccii Florentini, Bartholomaei Scalae, Jani Anysii, Joannis Pardi, Joannis Cotta, & Henrici Puderici, additis Elogiis ad instar illorum Pauli Jovii, de Nicolao V. Romano Pontifice, & Alphonso I. Aragoneo Neapolitanorum Rege, qui postquam Barbaries inceserat Italiam, Roma, & Neapoli politiores literas foverunt, & amplexati sunt. Ad hoc opus veluti Isagoge quaedam atrexeatur Tractatus de Ortu, & Progressu Academiae, quo Author complectebatur disciplinarum successionem, sumpto initio ab ea Cadmi aetate, qua literae ex Aegypto in Graciam translatae fuerunt. Argumentum ipsius erat, literas, liberalesque artes, non secus, ac Imperia, & Respublicas, varias Orbis partes peragrasse, suum fuisse initium sortitas, incrementum, declinationem, oblivionem, & rerum conversione, restorationem, juxta Platonis sententiam

αἰὼν πάντα φέρε, δολιχὸς χρόνος ἢ δὲ ἀμείβαν  
 ὄνομα, καὶ μορφή, καὶ φύσιν, ἢ δὲ τύχην.

Aevum cuncta fert, & longum tempus novit  
 mutare

Nomina, facies, naturam, & fortunam rerum.

Osten-

Ostendebat Cadmum, & ceteros, qui primi ex  
 Ægypto in Graciam literas adduxerunt, earum ope,  
 Principatum fuisse adeptos, literarumq; doctrinam,  
 ceu arcanum abscondidisse, eam tantummodo illis ape-  
 rientes, qui Regnum essent occupaturi; atque ita lon-  
 go ævo bonas artes fuisse per manus traditas, & Gra-  
 ciam non solum <sup>ἱερογλυφικὰς</sup>, sive sacras Ægyptiorum li-  
 teras novisse, sed & fabularem illam historiam, & in-  
 volucra, veritatē apud Populos obscurantia, in quibus  
 occultabantur dogmata, vel ad Politia, & Rem Sacra,  
 aut ad scientias, & mores pertinentia, quæ solis Prin-  
 cipibus revelabantur. Addebat eos, qui interiores, &  
 reconditas literas profitebantur, ad instar Sacerdo-  
 tum Ægyptiorum, tanto in pretio apud Principes  
 fuisse, ut socios, & consortes Imperii illos facerent, &  
 se in eorum Collegium cooptari non dedignarentur;  
 Hos autem sophos, sive sapientes vocatos, ea quæ pri-  
 mum posteris tradiderunt dogmata, versu scripsisse  
 constat, quæ vel Deorum cultū, & genus, vel Principū  
 laudes, aut Vitæ humanæ institutum, & naturalium  
 rerum cognitionem complectebantur, & huiusmodi  
 fuisse opera septem Graciæ sapientum, Solonis, Tha-  
 letis, Pittaci, Biantis, Chilonis Lacedemonii, Cleobu-  
 li, Periandri Corinthii, & aliorum. Explicabat po-  
 stea, quā viā, vulgatā literarum notitiā, Primores  
 cœperunt sectas instituere, disciplinarumque scien-  
 tiam tradere, & primus omnium Pitagoras Italica  
 Sectæ conditor, relicto sophi nomine, uti nimis elato,  
 philosophus, idest sapientiæ amicus appellari voluit,  
 ex quo postmodum literarum doctrinam profitentes,  
 Philosophi vocati fuerunt, & Sapientiæ studium Phi-  
 losophia; Enarrabat similiter, quo pacto ex Philoso-  
 phia Poësis fuerit divisa, & Poëta, qui Philosophi  
 erant



erant, peculiare nomen assumpserint; sicque differebat de origine Poëmatum Heroici, Tragediæ, Comediæ, & variis apud Græcos Poëseos generibus, eorumque inventoribus; Ad hæc, qua ratione ex Pherecide Atheniensi, qui primus (ex Porphyrio apud Suidam) soluta oratione scribere capit, succedentibus temporibus, Rhetores, sive Oratores, I. Consulti, Historici, Dialectici, Onomastici, sive Critici, & Grammatici insurrexerunt, & quemadmodum à Philosophia fuerint divisa, Medicina, Astronomia, Geometria, Arithmetica, & cetera liberales disciplinae, quarum progressum suis locis aperiebat; Præterea ludorum Gymnicorum originem illustrabat, asserens Authorem illorum Minoa, qui tenuit post Rhadamanthum Regnum Cretense, ut juventutem ad bellicos labores exerceret; & latè differebat de Olympicis, Pythiis, Isthmicis, Nemeisque ludis, & celeberrimis Græciæ Gymnasiis, Lyceo, Cynosarge, & Academia, in quibus juvenes exercebantur; Continuato deinde ordine, loquebatur de conditionibus juvenum, qui in ludorum exercitium admitti debebant, de variis ipsorum generibus, regulis, & institutionibus, quas Gymnasiarchæ, sive Gymnasiorum præfecti sese exercentibus tradere solebant, & demum de præmiis, quibus victores donabantur, & quia in Olympicis erant corona ex Bacchare, ex Oleastro in Pythiis, Pino in Isthmicis, & Apio in Nemeis, hæc arrepta occasione, de Coronis, earum usu, & significatu nonnulla cumulat. Addebat hæc Juvenum collegia, Ephebiaca appellata, Mamaluccorum collegiis apud Ægyptios, & Janizzerorum apud Turcas similia fuisse, verum non omnibus Civitatibus licebat illa habere, sed liberis tantum, & Principibus viris, aliorum legibus solu.



Solutis, & ita obscurū Strabonis locum de nostra Nea-  
poli obiter enodabat, quæ inter alia Græcorum Institu-  
torū vestigia, servabat Gymnasium, Ephebiacum, Cu-  
rias, quas Græci phatrias vocabant, & Græca nomi-  
na Romanis imposita, ut ex ejus verbis, colligi potest

πᾶσα δ' ἵκη τις Ἑλληνικὴ ἀγωγὴ ἐν ταῦτα σὺνιεται, γυμνασίῳ τε, Lib. 5.  
Geogr.  
καὶ ἐφηβιακῇ, φρατρίᾳ, καὶ οὐρίμοις Ἑλληνικαῖς, καὶ παρόντα Ρωμαίων.

Unde deducebat liberam fuisse Civitatem, etiam in-  
ipsis Strabonis temporibus, qui sub Tiberio floruit;  
Narrabat postmodum, Peloponessiacō bello, Regioni-  
bus devastatis, & cæsis juvenibus, militaribus in-  
exercitiis educatis, hæc loca diū deserta, philosophos oc-  
cupavisse, qui licet sūmo essent in pretio apud Græcos,  
nullum tamen locum publicum habebant, sed propriis  
in adibus discipulos excipiebant, docebantque phi-  
losophiam; Et ita juxta propositum sibi argumen-  
tum, quæ pro militaribus prius disciplinis loca insti-  
tuta fuerant, mutato rerum ordine, literis cessisse  
ostendebat, nominaque illa, Gymnasium, Lyceum, &  
Academiā scholas literarias retinuisse, & verba illa,  
Descendere in arenam, Conserere manus, & simi-  
lia, ad corporis exercitamenta pertinentia, pro scien-  
tificis velitationibus usurpata fuisse. Referebat in-  
Lyceo primum docuisse Archelaum, Anaximenis audi-  
torem, è Thaletis Milesii secta, quæ summò pere in-  
Græcia vigeat, & postea ejus discipulum Socratem;  
In Cynosarge Antistenem Cinicæ sectæ authorem, &  
in Academia Platonem, vacuo relicto Lyceo, ceu loco  
infausto, ob mortem præceptoris Socratis, qui calu-  
mniis Anyti, Melyti, & Lyconis circumventus, un-  
decim Virorum judicio, capitalem sententiam pas-  
sus fuit; at ibi aliquanto post docuisse testabatur Ari-

*Aristotelem Stagiritem, Platonis discipulum, ex quo peripathetici insurrexerunt, sic vocati, quia inambulantes in Lyceo disputabant; Continuatō deinde per varias Orbis partes Academiæ processu, Stoicam philosophiam ab Zenone Cittico originem accepisse, qui Cinicam sectam detestatus, in porticu Pæcile dicto, celebri Urbis loco, sive à Græcis nuncupato, scholam aperuit, & Epicuream ab Epicuro, qui ex Italica philosophia prodiens, primus Athenis in hortis docuit. Sic igitur ordinem resumens, asserebat numerosissimos redditos philosophos, varias in sectas divisos, & philosophiam per omnes gentes longè, latèque diffusam; At Principes, qui jam armis Imperium firmaverant, literas odere, & Philosophos gestorum suorum iudices agrè ferebant; itaque molesti, atque inuisi apud Magistratum esse caperunt, & nonnulli eorum jejunis, frigidisque prætextis, indicta causa, damnati, sicuti Anassagoras, Socrates, alique, & loca illa pluries disiecta, & deserta remanserunt. Interea explanabat, qua ratione, aucto Romano Imperio, literæ Romam ex Græcia fuerint translatae, & Poësis, Jurisprudentia, Rhetorica, Historia, Philosophia, ceteraque liberales discipline illuc migraverint; Quis primùm Romæ scholam aperuerit, ac docere caperit, & quomodo hæc disciplina ad summum perfectionis gradum pervenerint; Simul, resumpto Academiæ ordine, asserebat primam in Italia fuisse illam, quam Cicero in sua villa prope Puteolos instituit, ubi Tusculanas, & Academicas quæstiones composuit, quæ Academia postea intermissa fuit, interempto ejus Institutore trium Principum proscriptione, etenim præfata villa primò devenit ad Asinium Gallum, deinde ad Aruntium Stellam,*



lam, qui licet literis insignes, nullam tamen Acade-  
 mia curam habuerunt, alteram verò illam, quam Ro-  
 ma sub Galieno Principe Plotinus philosophus Plato-  
 nicus ordinavit. Exponebat deinceps, quomodo la-  
 bente Romano Imperio, literæ, ac liberales disciplinæ  
 paulatim minui ceperunt, & demum ex irruptione  
 Barbarorum ab Septentrionali plaga, eo collapsæ, &  
 cunctis ferro, flammisque vastatis, penitus everse,  
 ac sepultæ remanserunt; Narrabat postea, mutato  
 rerum Statu, literas revixisse, & parvula ipsarum  
 lumina in nostra Regione apud Cassinates Monachos  
 primum apparuisse, qui disciplinarum fragmenta,  
 veluti magni naufragii tabulas, servarunt, quò sa-  
 crarum literarum studia aptius excolerent; Posthac,  
 tempore Lotharii Caesaris, reperto Melpheæ apud Lu-  
 canos Juris Civilis corpore, Jurisprudentiæque scholis  
 apertis Bononiæ, Patavii, atque in Gallia, & atate  
 Friderici II. Imperatoris, Neapoli, iterum hoc stu-  
 dium in variis Europæ partibus florere cepisse. Indi-  
 cabat simul, quo pacto, cura, & studio ejusdem Fride-  
 rici Caesaris, qui rem literariam magno prosequen-  
 tur amore, opera Aristotelis physica, quæ Mauri in  
 hispaniam advexerant, in latinum idioma fuerint  
 conversa ex arabo, in quod illi unà cum Astrologia,  
 & Galeni Medicina, quam solam receperant, è græco  
 transtulerant, & hæc aditum postea ad Logicam,  
 Dialecticam, & Theologicas quæstiones apud Cucul-  
 atos aperuerit, qui per omnes scholas Aristotelis phi-  
 losophiam propagarunt, illique inhaeserunt Medici,  
 Galeni opinioni addicti; Postmodum recensens rena-  
 scentium literarum incrementum, explicabat qua-  
 ratione Emanuel Crisoloras orator missus in Italiam  
 ad Catholicos Principes ab Imperatore Costantino-  
 poli-



politano Emanuele Paleologo, ut auxilium ab illis peteret contra Bajazetem Turcarum Principem, incolatum ibi firmaverit, & Græcas literas, septingentorum spatio annorum ab ea exulantes, restituerit, advectis antiquorum Authorum libris, & Venetiis, Florentiæ, Romæ, Ticini, ac Mediolani scholis institutis, è quibus Viri omni ævo celebres prodierunt; Præterea, quemadmodum Nicolaus V. ad Summum Pontificatum evehctus, & Alphonsus I. Aragonensis Neapolitanorum Rex, politiores literas Romæ, & Neapoli restaurarunt, memorans insignem Romæ scholam, in qua Laurentius Valla Romanus docuit, & Julius ille Sanseverinus, qui legibus propriis, ac particularibus institutis, illustrem ibi erexit Academiam, quæ viros ingenio, & literis sanè mirabiles extulit; Deinde percensebat nobilem illam Porticum, Antonianam vocatam ab Antonio Panormita Consiliario, & intimo Alphonsi Regis, qui primus Neapoli congressum literatorum instituit, in quo selectiores de rebus literariis Stoicorum more differere solebant, & hi velut in *ῥητορικῶν* redacti, proprio nomini aliquid addebant, vel immutabant, ita ut Antonius ipse, qui de Bononia cognominabatur, Panormita appellari voluit, & Pontanus, qui prius Joannes vocabatur, Jovianus; Denique cōmemorabat omni gloria majorem illā Academiam, Pontani dictam, quam post Panormitæ obitum, Pontanus alumnus, non longè ab ipso Porticu, propè Regionem Montaneæ in propria domo ordinavit, in qua literarum studiis dediti, aliorum vestigiis inherentes in nominum, cognominumque mutatione, de rebus scientificis Academicorum more differēbant, & hanc primā fuisse testabatur post Barbariem ad instar illius Platonis, ex qua literati viri, velut ex equo Troja-

Trojano exeuntes ; undique bonas Artes propa-  
 garunt , adeout per eam Poësis , Rethorica , Histo-  
 ria , Jurisprudencia , Grammatica , Critica , & dein-  
 cept Philosophia , Medicina , Geometria , Astronomia ,  
 cateraque liberales disciplinae , perfectiores , & cultio-  
 res evaserint ; Rursus ostendebat , qualis fuerit , & ad  
 praesens scientiarum Status in Orbe reperiatur , qui pu-  
 blici literatorum Conventus erecti , & adhuc , quae  
 scholae , & Academiae in Italia , Gallia , Anglia , Hol-  
 landia , Alemannia , Hispania , caterisque Orbis par-  
 tibus ad cultum literarum promovendum sint insti-  
 tutae ; Ad summam , ne te pluribus morer , perstringebat  
 ab Cadmi initio usque ad praesentem aetatem , ordine  
 quidem historico , non autem Criticorum more , pro-  
 gressum literarum , ac disciplinarum omnium , repe-  
 tens ex omni memoria , quae Doctrinae , & Artes , quibus  
 Mundi aetatibus , & Regionibus floruerint , earum an-  
 tiquitates , & peragrationes per diversas Orbis par-  
 tes , rursus declinationes , obliviones , & instauratio-  
 nes , aperiens in singulis artibus inventionis occasio-  
 nem , & originem , tradendi morem , & disciplinam ,  
 sectas , & controversias maximè celebres , quae homi-  
 nes doctos tenuerunt , calumnias , quibus patuerunt ,  
 laudes , & honores , quibus decoratae sunt , Authores  
 praecipuos , libros praestantiores , scholas , successiones ,  
 Academias , Societates , Collegia , Ordines , & demum  
 omnia , quae ad Statum literarum spectant , & Bacco-  
 nus de Verulamio in Historia literarum desiderabat .  
 Opus igitur hoc tam utile , & eruditum , cum è suo  
 Museo ablatum fuisset eadem die , quae ex hac vita ,  
 lugentibus filiis , & familiaribus coram eo adstanti-  
 bus , discessit , amplius recuperari non potuit magna  
 literarum , Patriae , & nominis sui iactura ; Propte-  
 rea

De Augm.  
 Scientiar.  
 lib. 2. c. 4.



Tom. 3.  
Epist. 48.

rea successu tam deplorando admonitus, non bene  
proprii nominis gloria consulere eos novi, qui sua  
opera publica luci exponere nimis lentè adnituntur;  
illa enim facilè oblivione obruuntur, vel casibus, qui-  
bus adhuc superstites Authores subjacere solent, vel  
tandem incuria heredum, qui bonorum magis, quàm  
gloria majorum esse solent avidi; præter animi pro-  
positum, hoc opusculum, ut typis ederetur, permi-  
si, suadentibus etiam eruditissimis amicis Nicolao  
Galitia, & Josepho Lucina, quibus morem gerere non  
recusavi, ex eo præsertim, quòd Cartesius idem à  
sui temporis Mathematicis ad Scientia augmentum,  
faciendum, dicebat. Operam dare deberent com-  
ponendi omnia loca supersolida, ut ego compo-  
sui solida, & denique constitui omnia proble-  
mata, quæ adscendunt ad quadrum quadriqua-  
drati, aut ad cubum-cubi.

Vale, & vota tua cumulatè impleat Deus.







D E  
C O N S T R U C T I O N E  
Æ Q U A T I O N U M .



Ubtillissimæ, certissimæq; scientiarum, qualis est Analyseos doctrina, id præcipuum incommodi accidit, quod sublimioris tantum ingenii Viris penitus perspecta, plenèque cognita esse consuevit: hi enim aliorum inventis neglectis, propria solum excolere, atque in lucem proferre dignantur. Qui autem facilioribus sunt moribus, & explanandis jam traditis disciplinis duntaxat se se dedunt, non admodum excelsa pollere solent mente, ut illa præstare valeant, quæ huic scientiæ deesse comprehenduntur. Unde factum est, quod rarò, aut nunquam veterum inventis aliquid novi addant, ut passim videre est apud eos, qui Encyclopædias, aut Cursus disciplinarum componunt; in illis enim silentur, quæ majoris sunt ponderis, aut profundiorum eruditionem requirunt, levioribus

A                      bus

bus solummodo explicatis; Itaque partem illam, quæ constructionem omnis generis æquationum unicâ, & simplicissimâ viâ ostendit, ab aliis interruptâ, atque inconstanti methodo indicatam, nemo eorum, qui mentis acumine reliquis præstant, altius promovere, & ad perfectiorem ordinem redigere cogitavit; Quare mihi relictam hanc partem videns, unâ coronidem huic scientiæ imponere, atque illius studiosis prodesse tentavi, vagâ illâ construendi ratione, modò per cuborum latera, modò per lineas circulis inscriptas, postpositâ, eam in medium afferre visum est, quæ per simplicissimarum curvarum linearum intersectionem haberi potest, cujuscunque generis sint problemata: Bonorum, atque intelligentium judicio rem non contemnendam me præstitisse spero, quam si his placuisse cognovero, ad similia, & fortè etiam meliora animum deinceps appellere non gravabor.

Quoniam verò hæc methodus usu facilius, quam præceptis percipitur, longo sermone Lector non morabor, sed ad exempla progrediar.

Proponatur invenienda constructio æquationis quatuor dimensionum  $x^4 - px^3 - qx^2 - rx - f$   $\infty 0$ , sive  $x^4 \infty px^3 + qx^2 + rx + f$ , in qua omnes extant termini.

Hæc ex sui natura quatuor explicari potest radicibus, tribus nimirum falsis, & quarta vera, sed majori, ut signum  $-px^3$  indicat, omnibus falsis simul sumptis, vel duabus tantum radicibus, majori scilicet vera, & minori falsa, cum reliquæ duæ imaginariæ esse possint. Quomodo autem imaginariæ radices in quacunque æquatione sint dignoscendæ,



da, alibi si otium suppetet, ostendemus.

Methodus pro constructione invenienda ita procedit.

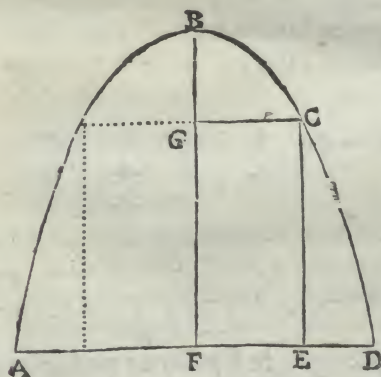
Formetur quadratum ex latere  $x^2 - \frac{1}{2}px$ , scilicet  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2$ .

Addatur utrique parti æquationis portio  $-px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2$ , & habebitur hæc altera æquatio  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2 \propto qx^2 + rx + s + \frac{1}{4}p^2$ .

Constituatur plano-planum  $a^2y^2$  æquale utrique ejus parti, sumpta  $a$ , facilitatis gratia, pro unitate, & duæ emergent æquationes; Altera nimirum  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4}p^2x^2 \propto a^2y^2$ , sive  $x^2 - \frac{1}{2}px \propto ay$  ad parabolam, cujus parameter  $a$ , sive unitas, CE axi parallela  $\propto y$ . CG, sive EF quantitas, quæ CE ab axe distat  $\propto \frac{1}{4}p$ . AE major basis pars  $\propto x$ , & DE minor  $\propto x - \frac{1}{2}p$ , quod ita demonstratur.

Quia rectangulum sub axe, ejusve parallelis, & parametro æquale est rectangulo sub basis segmentis, nimirum rectangulum ex  $a$ , & CE æquale rectangulo ex AE in ED, positis iisdem speciebus, habebitur æqua-

*Pappus in sine lib. 4.*



tio inventa  $x^2 - \frac{1}{2}px \propto ay$ . Q. E. D.

Hinc colligi potest quàm oscitanter Christophorus

A 2 rus

Lib. 2. c. 7.  
2. cap. 1.  
prop. 6.

loc. cit.

rus Sturmius in sua Mathesi enucleata asseruerit hanc parabolæ proprietatem fuisse veteribus Mathematicis incognitam, & Thomam Strode ex ingenioso M. S. de sectionibus conicis excerptam Thomæ Backero cōmunicasse, cum apud Pappum ea reperiatur demonstrata, & ab Slusio in sua Analyfi, Florimondo de Beaune in Adnotationibus ad Cartesii Geometriam, aliisque Mathematicis, qui Backerum præcesserunt, pro vulgatissima habeatur.

Altera verò æquatio erit

$$\begin{aligned} & qx^2 + rx + f \propto a^2 y^2, \text{ scilicet} \\ & + \frac{1}{4} p^2 \\ & aqx^2 + a^2 rx + a^3 f \propto a^2 y^2, \text{ hoc est} \\ & + \frac{1}{4} p^2 \\ & \frac{qx^2}{a} + rx + af \propto y^2 \text{ ad hyperbolā.} \\ & + \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2} \end{aligned}$$

At si pro quadrato ex latere  $x^2 - \frac{1}{2} px$  fingatur quadratum ex altero latere  $x^2 - \frac{1}{2} px - \frac{1}{2} q - \frac{1}{8} p^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{scilicet } x^2 - px^2 - qx^2 + \frac{1}{2} pqx + \frac{1}{4} q^2, \\ + \frac{1}{8} p^3 + \frac{1}{8} qp^2 + \frac{1}{64} p^4 \end{aligned}$$

ut propositæ æquationis evanescant duo termini  $px^2 + qx^2$ , invenientur æquationes ad duas parabolas, nimirum  $x^2 - \frac{1}{2} px - \frac{1}{2} q \propto ay$ , &  $- \frac{1}{8} p^2$

$rx + af \propto y^2$ , & si prior ex posteriore,

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \frac{pq}{a} + \frac{1}{4} q^2 \\ & + \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} + \frac{1}{8} \frac{qp^2}{a} \\ & + \frac{1}{64} \frac{p^4}{a^2} \end{aligned}$$

vel



vel posterior ex priore auferatur, altera ipsarum ad circulum transibit; ac proinde parabolæ, & circuli beneficio propositæ æquationis constructio faciliter hac via habebitur.

Sed ut ex hyperbola ad circulum transeamus; Primo in locum  $x^2$  subrogabimus ejus valorem  $\frac{1}{2} px + ay$ , & habebimus alteram æquationem

$$\frac{1}{2} \frac{qp^2}{a} + qy + rx + af \propto y^2,$$

$$+ \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{p^2}{a}$$

idest  $\frac{1}{2} \frac{qp^2}{a} + af \propto y^2 - qy$ , sive

$$+ \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} - \frac{1}{4} \frac{p^2}{a}$$

$$+ r$$

$$\frac{1}{2} qp^2 + f \propto y^2 - qy. \text{ Deinde auferemus ab}$$

$$+ \frac{1}{8} p^3 - \frac{1}{4} p^2$$

$$+ r$$

ea æquationem  $x^2 - \frac{1}{2} px \propto ay$ , & ad circulum æquatio orietur.

$$- x^2 + \frac{1}{2} px + f \propto y^2 - qy; \text{ Si enim utrique}$$

$$+ \frac{1}{2} qp - \frac{1}{4} p^2$$

$$+ \frac{1}{8} p^3 - a$$

$$+ r$$

ejus parti addatur quadratum dimidii quantitatis notæ secundi termini, ubi  $y^2$  reperitur, idest quadratum ex  $-\frac{1}{2} q - \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{2}$ , vel ex  $\frac{1}{2} q$

$$+ \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{2}, \text{ nimirum } \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{8} p^2 q + \frac{1}{2} q$$

$$+ \frac{1}{64} p^4 + \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{4}, \text{ habebitur æquatio}$$

$$- x^2$$

$$\begin{array}{rcl}
 -x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}q^2 \propto y^2 & - & qy + \frac{1}{4}q^2; \\
 + \frac{1}{2}qp + \frac{1}{8}p^2q & - & \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{8}p^2q \\
 + \frac{1}{8}p^3 + \frac{1}{2}q & = & a + \frac{1}{2}q \\
 + r + \frac{1}{64}p^4 & & + \frac{1}{64}p^4 \\
 & & + \frac{1}{8}p^2 \\
 & & + \frac{1}{4} \\
 & & + f
 \end{array}$$

Si postea addatur parti, in qua est  $-x^2$  quadratum alterius dimidii quantitatis notæ secundi termini, scilicet quadratum ex  $\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}qp + \frac{1}{16}p^3 + \frac{1}{2}r$ , nimirum  $\frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{8}qp^2 + \frac{1}{32}p^4 + \frac{1}{16}q^2p^2 + \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{4}pr + \frac{1}{4}qpr + \frac{1}{256}p^6 + \frac{1}{16}p^3r + \frac{1}{4}r^2$ , & ex aggregato  $\propto \frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{8}qp^2 + \frac{1}{32}p^4 + \frac{1}{16}q^2p^2 + \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{4}pr + \frac{1}{4}qpr + \frac{1}{256}p^6 + \frac{1}{16}p^3r + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{8}p^2q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4} + f$ , quod brevitatis causa ponitur  $\propto e^2$ , idem quadratum auferatur, ut ea mutetur in

$$\begin{array}{rcl}
 -x^2 + \frac{1}{2}px + e^2 & , & \\
 + \frac{1}{2}qp - \frac{1}{16}p^2 & & \\
 + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 & & \\
 + r - \frac{1}{32}p^4 & & \\
 & & - \frac{1}{16}q^2p^2 \\
 & & - \frac{1}{32}qp^4 \\
 & & - \frac{1}{4}pr \\
 & & - \frac{1}{4}qpr \\
 & & - \frac{1}{256}p^6 \\
 & & - \frac{1}{16}p^3r \\
 & & - \frac{1}{4}r^2
 \end{array}$$

cir-



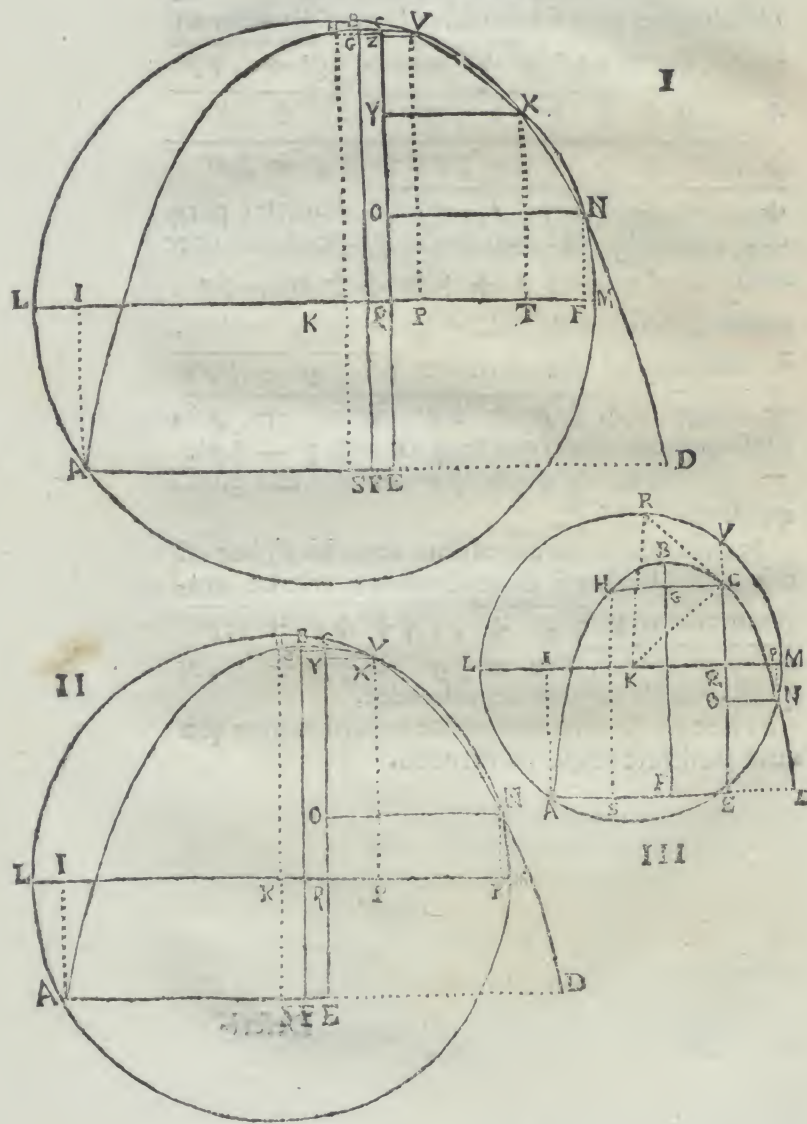
circulus statim manifestabitur, cujus semidiameter erit

$$\propto \sqrt{e^2}, \text{ hoc est } \propto \sqrt{\frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{8}qp^2 + \frac{1}{32}p^4 + \frac{1}{16}q^2p^2 + \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{4}pr + \frac{1}{4}qpr + \frac{1}{256}p^6 + \frac{1}{16}p^3r + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{8}p^2q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4} + f}, \text{ major diametri pars, cui parallela axi parabolæ perpendiculariter insistit } \propto \sqrt{e^2} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}qp + \frac{1}{16}p^3 + \frac{1}{2}r, \text{ minor } \propto \sqrt{e^2} - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}qp - \frac{1}{16}p^3 - \frac{1}{2}r, \text{ \& ordinata ad diametrum } \propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{8}p^2q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4} + f}, \text{ idest æqualis lateri quadrati ex } -\frac{1}{2}q - \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{2}, \text{ sive ex } \frac{1}{2}q + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{2} \text{ unâ cum quadrato ex } \sqrt{f}.$$

Sed si æquatio careat ultimo termino  $f$ , hoc est trium sit duntaxat dimensionum, erit ea tantummodo  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{8}p^2q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}}$ , sive  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{2}$ , ut quisque facili negotio deprehendet.

Et hæc est Analysis propositæ æquationis, ex qua mira facilitate oritur constructio.

Descri-





Describatur parabola ABD, cujus parameter  $a$ , five unitas. Ducatur ex puncto C recta CGH  $\propto \frac{1}{2}p$ , vel CG ordinata ad axim  $\propto \frac{1}{4}p$ . Sit CE axi parabolæ parallela  $\propto y$ . Sumatur portio ipsius CQ  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{2}$ . Ducatur ex puncto Q ad rectos angulos recta QK  $\propto \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}qp + \frac{1}{16}p^3 + \frac{1}{2}r$ , & producta in rectum sumatur KL  $\propto \sqrt{e^2}$ , idest æqualis lateri quadrati, quod cõponit quadrata ex KQ, QC, hoc est KC, &  $\sqrt{f}$ , five CR, *Fig. III.*

$$\begin{aligned} \text{nimirum } & \sqrt{\frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{8}qp^2 + \frac{1}{32}p^4 + \frac{1}{6}q^2p^2} \\ & + \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{4}pr + \frac{1}{4}qpr + \frac{1}{256}p^6 + \frac{1}{16}p^3r \\ & + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{8}p^2q + \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 \end{aligned}$$

+  $\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4} + f$ . Statuatur hæc recta circuli semidiameter, cujus centrum K; dico hunc circulum esse quæsitum, qui verticem parabolæ includens, eam in quatuor punctis A, V, X, N secabit, vel in tribus A, V, N, aut in duobus A, & N, quod accidit, vel cum duæ ex falsis radicibus inter se æquantur (tunc enim punctum V convenit cum puncto X, & circulus ibi parabolam tangit), vel cum eæ imaginariæ existunt. *Fig. I.*

Si igitur ex his punctis, in quibus parabolam, circulus secat, orthogonales ducantur ad CE axi parallelam VZ, XY, NO, & AE; erunt hæc propositæ æquationis radices, AE nimirum vera, ceteræ autem falsæ, quod ita demonstratur. *Fig. II.*

Quia AE inventa est  $\propto x$ , & CGH, five ES posita  $\propto \frac{1}{2}p$ , erit AS, five ED  $\propto x - \frac{1}{2}p$ ; cūque propter parabolam, rectangulum ex AE in ED sit æquale *Fig. III.*

B rectan-

10 DE CONSTRUCTIONE

*Pappus*  
*loc. cit.* rectangulo ex parametro in rectam CE, scilicet  
 $x^2 - \frac{1}{2} px \propto ay$ , erit propterea  $y$ , sive CE  
 $\propto \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{px}{a}$ , hoc est  $\propto x^2 - \frac{1}{2} px$ . Quia simili-  
 liter CQ posita est  $\propto \frac{1}{2} q + \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{2}$ , dem-  
 pta hac portione ex recta CE, scilicet ex  
 $x^2 - \frac{1}{2} px$ , reliqua erit QE, sive AI  $\propto x^2 - \frac{1}{2} px$   
 $- \frac{1}{2} q - \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{2}$ . Rursus quia circuli semi-  
 diameter positus fuit ex constructione  $\propto \sqrt{e^2}$ ,  
 nimirum  $\propto \sqrt{\frac{1}{16} p^2 + \frac{1}{8} qp^2 + \frac{1}{32} p^4 + \frac{1}{16} q^2 p^2$   
 $+ \frac{1}{32} qp^4 + \frac{1}{4} pr + \frac{1}{4} qpr + \frac{1}{256} p^6 + \frac{1}{16} p^3 r$   
 $+ \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{8} p^2 q + \frac{1}{2} q + \frac{1}{64} p^4$   
 $+ \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{4} + J$ , & KQ  $\propto \frac{1}{4} p$   
 $+ \frac{1}{4} qp + \frac{1}{16} p^3 + \frac{1}{4} r$ , erit tota LQ major  
 diametri portio  $\propto \sqrt{e^2} + \frac{1}{4} p + \frac{1}{4} qp$   
 $+ \frac{1}{16} p^3 + \frac{1}{2} r$ , ex qua si auferatur AE, sive  
 IQ  $\propto x$ , relinquetur LI  $\propto \sqrt{e^2} + \frac{1}{4} p$   
 $+ \frac{1}{4} qp + \frac{1}{16} p^3 + \frac{1}{2} r - x$ , ac proin-  
 de IM erit  $\propto \sqrt{e^2} - \frac{1}{4} p - \frac{1}{4} qp - \frac{1}{16} p^3$   
 $- \frac{1}{2} r + x$ . Sed propter circulum, rectan-  
 gulum ex LI in IM, hoc est ex  $\sqrt{e^2} + \frac{1}{4} p$   
 $+ \frac{1}{4} qp + \frac{1}{16} p^3 + \frac{1}{2} r - x$  in  
 $\sqrt{e^2} - \frac{1}{4} p - \frac{1}{4} qp - \frac{1}{16} p^3 - \frac{1}{2} r$   
 $+ x$ , est æquale quadrato ex AI, scilicet  
 quadrato ex  $x^2 - \frac{1}{2} px - \frac{1}{2} q - \frac{1}{8} p^2 - \frac{1}{2}$ ,  
 erit igitur æquatio

$- x^2$



ÆQUATIONUM. 11

$$\begin{aligned}
 -x^2 + \frac{1}{2}px + e^2 \propto x^4 - px^3 - qx^2 + pqx + \frac{1}{4}q^2, \\
 + \frac{1}{2}qp - \frac{1}{64}p^2 \quad + \frac{1}{4}p^2 \quad + \frac{1}{8}p^3 + \frac{1}{8}p^2q \\
 + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \quad - \frac{1}{4}p^2 \quad + \frac{1}{2}p + \frac{1}{64}p^4 \\
 + r - \frac{1}{32}p^4 \quad - 1 \quad + \frac{1}{2}q \\
 - \frac{1}{6}q^2p^2 \quad + \frac{1}{8}p^2 \\
 - \frac{1}{32}qp^4 \quad + \frac{1}{4} \\
 - \frac{1}{4}pr \\
 - \frac{1}{4}qpr \\
 - \frac{1}{256}p^6 \\
 - \frac{1}{16}p^3r \\
 - \frac{1}{4}r^2
 \end{aligned}$$

scilicet

$$\begin{aligned}
 -x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}q^2 \propto x^4 - px^3 - qx^2 + pqx + \frac{1}{4}q^2; \\
 + \frac{1}{2}qp + \frac{1}{8}p^2q \quad + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{8}p^3 + \frac{1}{8}p^2q \\
 + \frac{1}{8}p^3 + \frac{1}{64}p^4 \quad - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{64}p^4 \\
 + r + \frac{1}{2}q \quad - 1 \quad + \frac{1}{2}q \\
 + \frac{1}{8}p^2 \quad + \frac{1}{8}p^2 \\
 + \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{4} \\
 + f
 \end{aligned}$$

Et ablatis ex ea quantitibus communibus, & iis, quæ se mutuò tollunt, manifestabitur æquatio proposita  $rx + f \propto x^4 - px^3 - qx^2$ , hoc est  $x^4 - px^3 - qx^2 - rx - f \propto 0$ . Q. E. D.

Non minori quidem facilitate è duabus æquationibus primo loco repertis, idem assequemur.

Inventa eodem, quo suprà modo, prima ex ipsis  $x^2 - \frac{1}{2}px \propto ay$ ; Quia CE fuit posita  $\propto y$ ,

B 2 si ab

si ab ea auferatur  $CQ \propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{2}$ ;  
reliqua portio erit  $QE$ , sive  $AI$  ad diametrum  
circuli ordinata  $\propto y - \frac{1}{2}q - \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{2}$ . Posi-  
tis deinde cæteris, ut supra, inuenietur æquatio.

$$\begin{aligned} -x^2 + \frac{1}{2}px + e^2 &\propto y^2 - qy + \frac{1}{4}q^2, \\ + \frac{1}{2}qp - \frac{1}{16}p^2 &\quad - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{8}p^2q \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 &\quad - a + \frac{1}{64}p^4 \\ + r - \frac{1}{32}p^4 &\quad + \frac{1}{2}q \\ &\quad - \frac{1}{16}q^2p^2 + \frac{1}{8}p^3 \\ &\quad - \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{4} \\ &\quad - \frac{1}{4}pr \\ &\quad - \frac{1}{8}qpr \\ &\quad - \frac{1}{256}p^6 \\ &\quad - \frac{1}{16}p^3r \\ &\quad - \frac{1}{4}r^2 \end{aligned}$$

idest

$$\begin{aligned} -x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}q^2 &\propto y^2 - qy + \frac{1}{4}q^2, \text{ \& déptis} \\ + \frac{1}{2}qp + \frac{1}{8}p^2q &\quad - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{8}p^2q \\ + \frac{1}{8}p^3 + \frac{1}{64}p^4 &\quad - a + \frac{1}{64}p^4 \\ + r + \frac{1}{2}q &\quad + \frac{1}{2}q \\ &\quad + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{8}p^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &\quad + f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{communibus, erit } -x^2 + \frac{1}{2}px + f &\propto y^2 - qy; \\ &\quad + \frac{1}{2}qp \quad - \frac{1}{4}p^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}p^3 \quad - a \\ &\quad + r \end{aligned}$$

addi-



addita postea utrique parti hujus æquationis prima inventa  $x^2 - \frac{1}{2} px \propto ay$ ,

habebitur  $\frac{1}{2} qpx + f \propto y^2 - qy$ ,

$$\begin{array}{r} + \frac{1}{8} p^3 \\ + r \end{array} \quad - \frac{1}{4} p^2$$

five  $\frac{1}{2} \frac{qp}{a} x + af \propto y^2 - qy$ ,

$$\begin{array}{r} + \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} \\ + r \end{array} \quad - \frac{1}{4} \frac{p^2}{a}$$

$$+ r$$

idest  $\frac{1}{2} \frac{qp}{a} x + af + qy \propto y^2$ ;

$$\begin{array}{r} + \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} \\ + r \end{array} \quad + \frac{1}{4} \frac{p^2}{a}$$

$$+ r$$

& demum restituto in locum  $\frac{1}{2} px + ay$  ejus valore  $x^2$ , apparebit altera æquatio

$$\frac{q}{a} x^2 + rx + af \propto y^2. \text{ Q. E. iterum D.}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2}$$

Eadem ratione ostendi potest VZ, XY, & NO falsas esse ejusdem æquationis radices, sumptis singulis ipsarum  $\propto -x$ , & cæteris, ut supra, positis.

Hæc methodus est universalis ad inveniendam constructionem æquationum omnium trium, & quatuor dimensionum, & locum non tantum sibi vindicat in iis, in quibus omnes extant termini, sed

sed etiam in illis, quæ aliquibus eorum carent, imò si defuerit secundus, facilius evadit calculus; non enim opus erit efformare quadratum ex latere  $x^2 - \frac{1}{2} px$ , vel prout necessitas urget, ex  $x^2 + \frac{1}{2} px$ , ut in æquationibus, in quibus secundus reperitur terminus, sed tantum sufficiet effingere plano-planum  $a^2 y^2$  æquale utrique parti æquationis, & cætera, ut suprà, dummodo æquatio trium dimensionum ad quatuor usque extollatur.

Sit invenienda constructio æquationis

$$x^4 * - qx^2 + rx - f,$$

sive  $x^4 \propto * + qx^2 - rx + f$  explicabilis juxta sui naturam de quatuor radicibus, tribus nimirum veris, & quarta falsa, veris æquali, vel de duabus tantum inæqualibus, altera scilicet vera, altera autem falsa, cum reliquæ duæ imaginariæ existant.

Ponatur plano-planum  $a^2 y^2$  æquale utrique parti æquationis, posita, ut suprà,  $a$  pro unitate, & habebitur  $x^4 \propto a^2 y^2$ , sive  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $qx^2 - rx + f \propto a^2 y^2$ , sive  $aqx^2 - a^2 rx + af \propto a^2 y^2$ , hoc est  $\frac{qx^2}{a} - rx + af \propto y^2$  ad hyperbolam, vel ad ellipsim, si terminus  $qx^2$  signo — afficiatur, sive ad circulum, si  $a$  non unitati, sed  $\sqrt{q}$  ponatur æqualis, ut videre est in æquatione  $x^4 * + qx^2 - rx + f$ , hoc est  $x^4 \propto * - qx^2 + rx - f$ . Sed si fingatur quadratum ex latere  $x^2 - \frac{1}{2} q$ , scilicet  $x^4 - qx^2 + \frac{1}{4} q^2$ , & portio ipsius  $-qx^2 + \frac{1}{4} q^2$  addatur utrique parti æquationis, ut evanescat terminus  $qx^2$ , inveniuntur æquationes  $x^2 - \frac{1}{2} q \propto ay$  ad parabolam,



Iam, &  $-rx + af \propto y^2$  similiter ad parabola  
 $+ \frac{1}{4} q^2$

Iam, ex qua facilis est ad circulum transitus, ut  
 circuli, & parabolæ intersectione æquatio con-  
 struatur.

At ad methodum redeunt, pro hyperbola  
 circulum habebimus, si in locum  $x^2$  subrogabimus  
 ejus valorem  $ay$ ; nam ex illa æquatione emerget  
 hæc altera  $qy - rx + af \propto y^2$ , hoc est  $-rx$   
 $+ af \propto y^2 - qy$ , sive  $-rx + f \propto y^2 - qy$ , ex  
 qua si priorem deducamus  $x^2 \propto ay$ , ad circulum  
 æquatio orietur  $-x^2 - rx + f \propto y^2 - qy$   
 $-a$

Addito enim utrique parti quadrato dimidii  
 quantitatis notæ secundi termini, ubi habetur  $y^2$ ,  
 scilicet quadrato ex  $-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ , vel ex  $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$ ,  
 nimirum  $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}$ , erit

$$\begin{array}{rcl} -x^2 - rx + \frac{1}{4}q^2 \propto y^2 - qy + \frac{1}{4}q^2 & & \\ + \frac{1}{2}q & -a + \frac{1}{2}q & \\ + \frac{1}{4} & + \frac{1}{4} & \\ + f & & \end{array}$$

Rursus addito illi æquationis parti, in qua repe-  
 ritur  $-x^2$ , quadrato alterius dimidii notæ quan-  
 titatis secundi termini, scilicet quadrato ex  $\frac{1}{2}r$ ,  
 hoc est  $\frac{1}{4}r^2$ , & ablato deinde ex aggregato  $\frac{1}{4}q^2$   
 $+ \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f + \frac{1}{4}r^2$ , quod ponitur  $\propto e^2$ ,  
 ut mutetur æquatio in  $-x^2 - rx + e^2 - \frac{1}{4}r^2$ ,  
 circulus statim manifestabitur, ejusque semidiamete-  
 ter erit  $\propto \sqrt{e^2}$ , scilicet  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}}$   
 $+ f + \frac{1}{4}r^2$ . major diametri pars, cui axis  
 para-

parabolæ perpendiculariter infistit  $\propto \sqrt{e^2 + \frac{1}{2}r}$ ,  
 minor  $\propto \sqrt{e^2 - \frac{1}{2}r}$ , & ordinata ad diametrum  
 $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f}$ , scilicet æqualis lateri  
 quadrati ex  $-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ , sive ex  $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$ , unâ  
 cum quadrato ex  $\sqrt{f}$ , quæ reperietur  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$ ,  
 si deficiat ultimus terminus, hoc est æquatio sit  
 trium dimensionum.

Et hæc est propositæ æquationis resolutio.

Describatur pro ejus constructione parabola  
 ABD, cujus parameter  $a$ , sive unitas, sit BE axis  
 $\propto y$ . Sumatur portio BQ  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$ , ducatur  
 ex puncto Q ad rectos angulos QK  $\propto \frac{1}{2}r$ , &  
 producta in rectum, constituatur KL semidiamete-  
 ter circuli, ex centro K descripti  $\propto \sqrt{e^2}$ , nimirum  
 æqualis lateri quadrati, compositi ex quadra-  
 tis BQ, QK, &  $\sqrt{f}$ , simul sumptis, hoc est  
 $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f + \frac{1}{4}r^2}$ . Dico para-  
 bolam ab hoc circulo in quatuor punctis A, T,  
 H, N secari, vel in tribus A, H, N, quod ac-  
 cidit, cum duæ ex veris radicibus inter se æquan-  
 tur (tunc enim punctum H congruit cum puncto  
 T, & circulus ibi parabolam tangit), vel de-  
 mum in duobus A, & N, si duæ ex ipsis imagi-  
 nariæ existant.

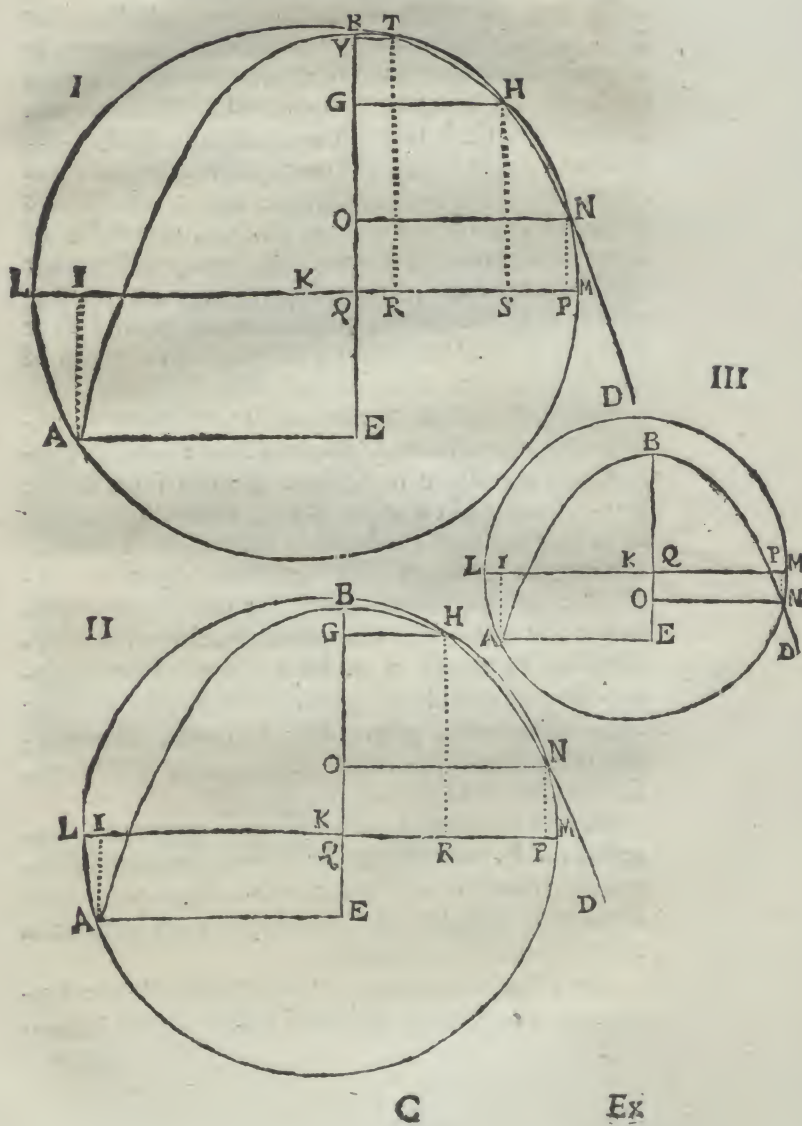
Si igitur ex his punctis ad parabolæ axim ordi-  
 natæ ducantur, erunt hæc propositæ æquationis ra-  
 dices, AE nimirum falsa, cæteræ autem veræ.

Ex

Fig. I.  
Fig. II.

Fig. III.





Ex hoc exemplo percipitur, quomodo Renatus Des-cartes constructionem problematum trium, & quatuor dimensionum (secundo termino è medio sublato) reperire potuerit, quod artificium, cum magnum Artis Analyticæ arcanum abscondidit, & nemo ex iis, qui ejus in Geometriam commentaria ediderunt, exponere sollicitus fuit; At Petrus Fermatius in opusculo, cui titulus, *Appendix ad Isagogen Topicam continens solutionem problematum solidorum per locos*, Cartesii artificium, nullâ Authoris factâ mentione, quodammodo prodidit, & hoc, ut veritatem fatear, lumen non exiguum ad methodum hanc deregendam mihi præbuit.

Similiter ex hoc, & præcedenti colligitur diversitatem hujus Methodi ab illa Cartesiana, & Fermatiana consistere in fictione quadrati ex latere  $x^2 - \frac{1}{2}px$ , vel ex  $x^2 + \frac{1}{2}px$ , secundo termino in æquationibus existente, quam, deficiente, omittimus; atque illa quidem oritur ex parabole proprietate apud Pappum demonstrata; undè rationem compertam censeo, cur orthogonales ductæ à punctis interfectionum parabole, & circuli ad parallelam ab ejus axe per  $\frac{1}{4}p$  distantem, cum adest secundus terminus, sint propositæ æquationis radices, cum verò abest, sint ordinatæ ad axim.

Mirari propterea non desinam, quomodo Cartesius, ac Fermatius duo clarissima Geometriæ lumina, in construendis his æquationibus methodum hanc non viderint, & secundum earum terminum tollere necessum putarint.

Sed progrediamur ad constructionis demonstrationem, quæ parum, vel nihil differt à præcedenti.

Quia



Quia VT, five GH, vel ON est  $\propto x$ , & parabola parameter ponitur  $\propto a$ , five unitati, erit portio axis BV, vel BG, five BO  $\propto x^2$ . Rursus quia BQ fuit ex constructione posita  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$ , si ab ea auferatur  $x^2$ , reliqua erit portio VQ, five TR, vel GQ, five HS, aut HR, vel OQ, five NP  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{1}{2} - x^2$ . Sin autem ex BO  $\propto x^2$  auferatur portio BQ, supererit QO, five PN  $\propto x^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ . Similiter quia LK circuli semidiameter fuit ex constructione positus  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2}$

$+ \frac{1}{4}q + \frac{1}{4} + \int \frac{1}{4}r^2$ . KQ  $\propto \frac{1}{2}r$ , & VT, five QR, vel GH, five QS, aut QR, vel ON, five QP  $\propto x$ , erit major diametri portio LR, five LS, aut LP  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q} + \frac{1}{4} + \int \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r + x$ , ac proinde minor RM, five SM, vel PM  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q} + \frac{1}{4} + \int \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r - x$ . Cum igitur propter circulum, quadratum ex TR, five HS, aut HR, vel NP, scilicet quadratum ex  $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2} - x^2$ , vel ex  $x^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$  sit æquale rectangulo ex LR, five LS, aut LP in RM, five SM, aut PM, hoc est ex  $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q} + \frac{1}{4} + \int \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r + x$  in  $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q} + \frac{1}{4} + \int \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r - x$ , erit æquatio

$$\begin{array}{rcl} -x^2 - rx + \frac{1}{4}q^2 & \propto & x^4 - qx^2 + \frac{1}{4}q^2, \\ + \frac{1}{2}q & - & + \frac{1}{2}q \\ + \frac{1}{4} & & + \frac{1}{4} \\ + \int & & \end{array}$$

C 2 & dc.

& deletis quantitibus communibus, habebitur  
 $-rx + f \propto x^4 - qx^2$ , scilicet  $x^4 \propto * + qx^2$   
 $-rx + f$ . Q.E.D.

Atque hæc demonstratio simplicior Cartesiana mihi videtur, nam illa consistit in comparandis intrâ circulum hypotenusis duorum orthogonalium triangulorum, veluti semidiametris; hæc verò oritur ex proprietate earumdem curvarum constructionem efficientium.

Eadem ratione constabit AE falsam esse propositæ æquationis radicem, at tribus veris æqualem, satis luculentè demonstravit Franciscus à Schooten Analyseos beneficio in commentariis Cartesianæ Geometriæ.

Et hæc est methodus, quam pro construendis æquationibus omnibus explanandam suscepimus, quæ non solum simplicior esse deprehenditur eâ, qua usus fuit Slusius in sua Analyfi pro constructione æquationum, sed etiam illâ, quam invenisse Backerum in Regula ab ipso Centrali appellata Sturmius refert, & hoc, ut præteream, tam Slusium, quam Backerum Renati vestigiis insistentes, eodem defectu unâ cum illo laborasse, positam æquationem de duabus tantum radicibus explicantes, cum de quatuor etiam juxta sui naturam explicabilis esse potuisset.

Cæterum, ne quid ad methodi amplitudinem desit, proponatur investiganda constructio æquationis  $x^4 * + qx^2 * - f$ , sive  $x^4 \propto * - qx^2 * + f$  de duabus æqualibus explicabilis radicibus, altera nimirum falsa, altera vera, reliquis duabus imaginariis existentibus; quæ, & si beneficio Geometriæ, quam planam vocant, nullo negotio haberi pos-



possint, tamen ob originem æquationis solidam, exposita methodo non minori facilitate invenientur.

Æquetur plano-planum  $ay^2$  utrique parti æquationis, & habebitur  $x^2 \propto ay^2$ , scilicet  $x^2 \propto ay$  ad parabolam ex una parte, ex altera verò  $-\frac{qx^2}{a}$

+  $af \propto y^2$  ad circulum, si  $a$ , five unitas sit  $\propto q$ , sin autem major, vel minor, ad ellipsum.

Quòd si formetur quadratū ex latere  $x^2 + \frac{1}{4}q$ , ut destruaturs terminus æquationis  $-qx^2$ , invenientur  $x^2 + \frac{1}{4}q \propto ay$  ad parabolam, &  $\frac{1}{4}q^2 + af \propto y^2$  ad hyperbolam, ex qua si auferatur, æquatio ad parabolam, alia ad circulum emerget.

$$-x^2 + \frac{1}{4}q^2 \propto y^2 - ay.$$

$$-\frac{1}{2}q$$

$$+ af$$

Sed ut ellipsis in circulum evadat, eadem ratione, qua in præcedentibus exemplis, procedemus.

Primò in locum  $x^2$  subrogabimus ejus valorem  $ay$ , & habebimus æquationem  $-qy + af \propto y^2$ . Deinde auferemus ex ea  $x^2 \propto ay$ , & ad circulum æquatio oriatur  $-x^2 - qy + af \propto y^2 - ay$ , hoc est  $-x^2 + af \propto y^2 + qy$ , five  $-x^2 + af \propto y^2 + by$ ,

posita  $b \propto q - a$ , si  $q$  major sit quàm  $a$ .

Addito enim utrique ejus parti quadrato ex dimidio  $q - a$ , idest  $q - 1$ , five  $b$ , scilicet  $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}$ , vel  $\frac{1}{4}b^2$ , erit

$$-x^2 + \frac{1}{4}q^2 \propto y^2 + qy + \frac{1}{4}q^2,$$

$$-\frac{1}{2}q \quad -a \quad -\frac{1}{2}q$$

$$+\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{4}$$

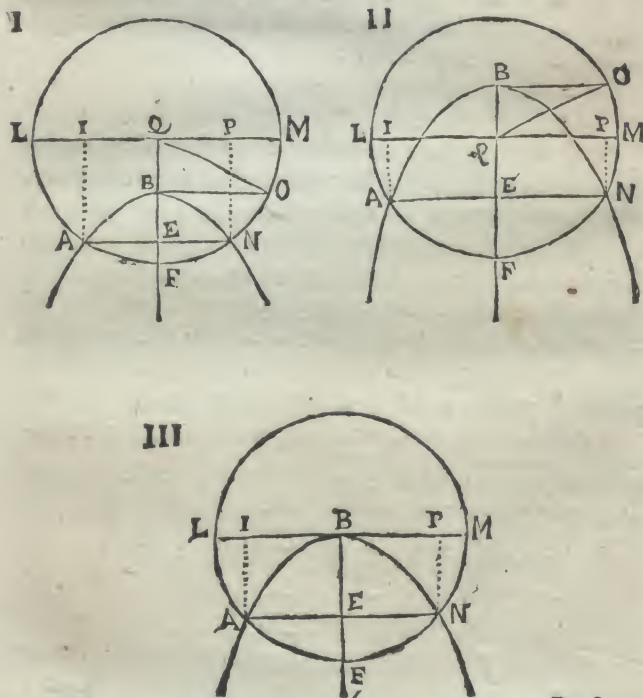
$$+ f$$

hoc

hoc est  $-x^2 + \frac{1}{4}b^2 \propto y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$ , atque

*Fig. I.* hinc circulus emergit, cujus centrum erit punctum Q, per quod tranlit axis parabolæ ultra verticem productus, semidiameter  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f}$ , sive  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + f}$ , & ordinata ad diametrum latus ex quadrato  $\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ , sive  $\frac{1}{2}b$ , unâ cum quadrato ex  $\sqrt{f}$ , hoc est idem semidiameter.

Et hæc est resolutio propositæ æquationis, ex qua constructio facillimè deducitur.



Descri-



Describatur parabola ABN, cujus parameter  $a$ ,  
sive unitas, & axis BF  $\propto y$ , sumatur portio BQ  
ultrà verticis punctum  $\propto \frac{1}{2}b$ , hoc est  $\propto \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ .  
Ducatur ex puncto Q orthogonalis ad eam QL  
 $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + f}$ , nimirū  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f}$ ,  
idest æqualis lateri ex summa quadratorum BQ,  
&  $\sqrt{f}$ , sive BO. Constituatur hæc recta semi-  
diameter circuli, cujus centrum Q. Dico hunc  
esse circulum quæsitum, qui parabolam citrà ver-  
ticem in duobus punctis A, & N secabit, ex qui-  
bus si ordinatæ ad axim AE, NE ducantur, erunt  
propositæ æquationis radices, altera scilicet vera,  
altera falsa.

Quòd si  $q$  sit minor quàm  $a$ , debet sumi  
 $-b \propto q - a$ , & addito quadrato ex ipsius dimi- Fig. II.  
dio utrique parti æquationis, orietur æquatio ad  
circulum  $-x^2 + \frac{1}{4}b^2 \propto y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$ , cujus  
centrum erit in puncto axis citrà verticem distans  
per  $\frac{1}{2}b$ , hoc est per  $-\frac{1}{2}q + a$ .

Si verò sit æqualis  $a$ , habebitur, ut diximus, ad  
circulum æquatio  $-x^2 + af \propto y^2$ , & ejus centrum  
erit in ipso parabolæ vertice, quod ex constru- Fig. III.  
tionibus clarius manifestum fit. Sed ad jam posi-  
tæ constructionis demonstrationem progrediamur.

Quia AE est  $\propto x$ , & parabolæ parameter  $\propto a$ , sive  
unitati, erit portio axis EB  $\propto x^2$ . Rursus, quia altera Fig. I.  
portio BQ ultrà verticem producta posita est  $\propto \frac{1}{2}b$ ,  
hoc est  $\propto \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ , erit tota EQ, sive AI  $\propto x^2$   
 $+ \frac{1}{2}b$ , scilicet  $\propto x^2 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}$ . Ad hæc, quia  
circuli semidiameter LQ, sive QM positus fuit  
ex constructione  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + f}$ , nimi-  
rum

rum  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f}$ , & AE, five IQ  $\propto x$ ,  
 erit MI major diametri portio  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + f + x}$ ,  
 idest  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4} + f + x}$ , & LI minor  
 $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + f - x}$ , scilicet  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}q$   
 $+ \frac{1}{4} + f - x}$ . Propterea cum propter circulum,  
 quadratum ex EQ, five AI sit æquale rectan-  
 gulo ex MI in IL, emerget æquatio  
 $-x^2 + \frac{1}{4}b^2 \propto x^4 + bx^2 + \frac{1}{4}b^2$ ,  
 $+ f$

scilicet  $-x^2 + \frac{1}{4}q^2 \propto x^4 + qx^2 + \frac{1}{4}q^2$ ,  
 $- \frac{1}{2}q \quad - 1 \quad - \frac{1}{2}q$   
 $+ \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{4}$   
 $+ f$

& deletis quantitibus cõmunibus,  $f \propto x^4 + qx^2$ ,  
 nimirum  $x^4 \propto * - qx^2 * + f$ . Q. E. D.

Eadem ratione demonstrabitur NE falsam esse  
 propositæ æquationis radicem, & quod ea sit veræ  
 æqualis, ex ipsa constructione patet. Atque hæc  
 de æquationibus quatuor graduum dicta sufficiant.  
 Descendamus nunc ad constructionem æquatio-  
 num trium dimensionum.

Proponatur invenienda constructio æquationis  
 $x^3 \propto f$ , de unica duntaxat vera radice explicabi-  
 lis, quæ oritur ex problemate de duabus medio  
 loco proportionalibus inter duas rectas datas in-  
 veniendis.

Sumatur  $a$  pro unitate, & æquatio ad quartum  
 gradum exaltetur.

Ponatur deinde utraque ipsius pars  $\propto a^2y^2$ , &  
 duæ invenientur æquationes  $x^4 \propto a^2y^2$ , hoc  
 est



est  $x^2 \propto ay$ , &  $a^2fx \propto a^2y^2$ , scilicet  $fx \propto y^2$ :  
utraq; ad parabolam, ex quibus fortassè metho-  
dus elicitur, qua veteres Mathematici ab Eutocio  
relati, duarum parabolarum ope constructionem  
hujus problematis mira facilitate, nec in Geome-  
triam peccantes, ut quidam rati sunt, investigare  
potuerint.

Sed ut ex parabola ad circulum transeamus,  
alteram ab altera auferemus, & habebimus  
 $-x^2 + fx \propto y^2 - ay$ . Si postea utrique ejus  
parti addatur quadratum ex dimidio  $a$ , scilicet  $\frac{1}{4}$ ,  
emerget  $-x^2 + fx + \frac{1}{4} \propto y^2 - ay + \frac{1}{4}$ , ex qua  
circulus oritur; nam mutata æquationis parte, ubi  
 $-x^2$  reperitur, in  $-x^2 + fx + e^2 - \frac{1}{4}f^2$ , regula,  
qua in præcedentibus exemplis usi fuimus, circu-  
lus statim manifestabitur, ejusque semidiameter  
erit  $\propto \sqrt{e^2}$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ , major  
diametri pars, cui axis parabolæ ad rectos angu-  
los insistit  $\propto \sqrt{e^2 + \frac{1}{2}f}$ , minor  $\propto \sqrt{e^2 - \frac{1}{2}f}$ ,  
& ordinata ad diametrum  $\propto \frac{1}{2}$ .

Et hæc est resolutio propositæ æquationis.

D

De





Demonstratio.

Quia LK posita est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ . KQ  $\propto \frac{1}{2}f$ ,  
& AE, sive IQ inventa  $\propto x$ , erit LI  $\propto \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$   
 $+ \frac{1}{2}f - x$ , & IM  $\propto \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2} - \frac{1}{2}f + x$ .  
Quoniam similiter (posita  $a$  pro unitate) portio axis  
BE propter parabolam, est  $\propto x^2$ , dempta ex ea BQ,  
reliqua portio QE, sive IA erit  $\propto x^2 - \frac{1}{2}$ . Cum  
igitur ob circulum, quadratum ex IA sit æquale  
rectangulo ex LI in IM, emerget æquatio  $x^4 - x^2$   
 $+ \frac{1}{4}x - x^2 + fx + \frac{1}{4}$ , & deletis superfluis,  
supererit  $x^4 \propto fx$ , hoc est  $x^3 \propto f$ . Q. E. D.

Hæc igitur demonstratio nedum locum habet,  
cùm  $a$  pro unitate, sed cùm pro altera ex datis ac-  
cipitur; nam sive ea sit unitas, sive altera ex datis,  
semper erit parabolæ parameter, & portio axis  
BQ æqualis ipsius dimidio; reliqua verò  $f$  æqualis  
OQ, sive NE, hoc est duplo portionis KQ semi-  
diametri circuli.

Altera Demonstratio Veterum more.

Quia in posita figura rectangulum PEA æquatur  
rectangulo BEF, addito communi quadrato ex  
AE, sive NP, erit rectangulum NEA æquale re-  
ctangulo BEF unà cum quadrato ex AE. Quia si-  
militer hoc quadratum æquatur rectangulo EBC,  
sive EBF, erit NEA rectangulum æquale rectan-  
gulis BEF, & EBF, hoc est æquale quadrato ex  
EB; propterea igitur, ut AE ad EB, ita EB ad  
NE, sive QO, vel  $s$ ; undè cùm sit per parabolam,  
ut BC, sive  $A$  ad AE, ita AE ad EB, erunt quatuor  
rectæ  $A$ . AE. EB, &  $s$  continuò proportionales,  
ac proinde AE prima ex mediis quæsitis. Q. E. D.

D 2

Rur-

Rurfus proponatur construenda æquatio  $x^3 \propto * - rx + f$ , de unica tantum vera radice explicabilis, cum reliquæ duæ imaginariæ existant.

Exaltata hæc ad quartum gradum, & posita utrâque ejus parte  $\propto a^2 y^2$ , habebitur  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $-rx^2 + fx \propto a^2 y^2$ , scilicet  $-arx^2 + a^2 fx \propto a^2 y^2$ , nimirum  $-\frac{rx^2}{a} + fx \propto y^2$  ad circulum, si  $a$ , sive unitas sit  $\propto r$ ; ad ellipsim verò, si major, aut minor.

Sed si tam in hoc exemplo, quàm in sequentibus ad cubicas æquationes spectantibus, formetur quadratum ex latere  $x^2 + \frac{1}{2}r$ , aut  $x^2 - \frac{1}{2}r$ , ut evanescat terminus  $-rx^2$ , vel  $+rx^2$ , æquationes ad duas parabolæ invenientur, nimirum  $x^2 + \frac{1}{2}r \propto ay$ , &  $-fx + \frac{1}{4}r^2 \propto y^2$ , sive  $x^2 - \frac{1}{2}r \propto ay$ , &  $-fx + \frac{1}{4}r^2 \propto y^2$ , vel  $x^2 - \frac{1}{2}r \propto ay$ , &  $fx + \frac{1}{4}r^2 \propto y^2$ , aut  $x^2 + \frac{1}{2}r \propto ay$ , &  $fx + \frac{1}{4}r^2 \propto y^2$ ; ex quibus locis facilis problematum omnium solidorum constructio inveniri potest, & feliciter promoveri methodus, qua veteres Mathematici problema de duabus mediis proportionalibus, duarum parabolæ ope, construxerunt.

Quòd si postea circuli, & parabolæ interfectione propositas æquationes construere quis velit, facilis erit ex altera harum parabolæ ad circulum transitus, regula suprà indicata.

At ad methodum redeuntes, ut ex ellipsi ad circulum transeamus; Primò in locum  $x^2$  subrogabimus ejus valorem  $ay$ , & habebimus æquationem  $-ry + fx \propto y^2$ , nimirum  $fx \propto y^2 + ry$ . Deinde ex ea auferemus  $x^2 \propto ay$ , & altera exorietur æquatio  $-x^2 + fx \propto y^2 + ry$ ,

- a  
sive



ÆQUATIONUM. 29

sive  $-x^2 + fx \propto y^2 + by$ , posita  $b \propto \frac{r}{r-a}$ , si  $r$  major sit quàm  $a$ ; si postea utrique ejus parti addatur quadratũ ex dimidio  $\frac{r}{r-a}$ , sive  $\frac{r}{r-1}$ , aut  $b$ , scilicet  $\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}$ , vel  $\frac{1}{4}b^2$ , emerget æquatio ad circulum

$$\begin{array}{rcccl} -x^2 + fx & + & \frac{1}{4}r^2 & \propto & y^2 + ry + \frac{1}{4}r^2, \\ & & -\frac{1}{2}r & & -a - \frac{1}{2}r, \\ & & + \frac{1}{4} & & + \frac{1}{4} \end{array}$$

idest  $-x^2 + fx + \frac{1}{4}b^2 \propto y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$ , & si mutetur pars, in qua  $-x^2$  reperitur, in  $-x^2 + fx + e^2 - \frac{1}{4}f^2$ , ejus semidiameter erit  $\propto \sqrt{e^2}$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ , scilicet  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}f^2}$ , major pars diametri, qui per parabolæ axim suprà verticẽ productum orthogonallyter transit  $\propto \sqrt{e^2 + \frac{1}{4}f^2}$ , minor  $\propto \sqrt{e^2 - \frac{1}{4}f^2}$ , & ordinata ad diametrum  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}}$ , nimirum  $\propto \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ , hoc est  $\propto \frac{1}{2}b$ .

Et hæc est Analysis propositæ æquationis.

De

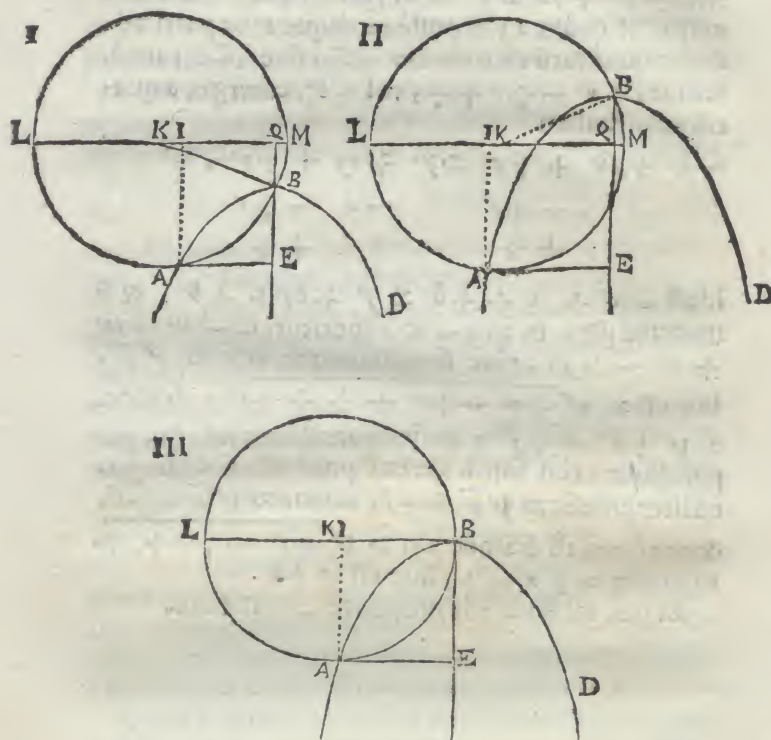


Fig. 1. Describatur pro constructione parabola ABD  
 cujus parameter  $a$ , five unitas. Sumatur portio axis  
 BQ suprà verticem  $\propto \frac{1}{2}b$ , hoc est  $\propto \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ .  
 Ducatur ipsi orthogonalis QK  $\propto \frac{1}{2}f$ , & pro-  
 ducatur in rectum, donec KL sit  $\propto \sqrt{e^2}$ , five  
 $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}f^2}$ , idest  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ ,  
 scilicet æqualis KB, nimirum lateri ex aggregato  
 quadratorum BQ, QK. Constituatur ea circuli se-  
 mi-



mediameter, cujus centrum K; dico hunc circulum parabolam secare in puncto A, (præter verticem, similiter in circumferentia existentem) ex quo si ducatur ad axim ordinata AE, hæc quæsitam radicem repræsentabit.

Et hæc est illa radix, ad quam eruendam Renatus Des-Cartes amplitudinis suæ methodi oblitus, confugit ad Cardani regulam Scipioni Ferreo Bononiensi tributam, sed re verâ à Nicolao Tartalea Brixienfi inventam.

At si  $r$  minor esset quàm  $a$ , deberet sumi  $-b \propto \sqrt{r-a}$ , & per additionem quadrati ex ipsius dimidio utrique parti æquationis, fiet æquatio ad circulum  $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}b^2 \propto y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$ , cujus centrum erit in orthogonali ducta ex axis puncto Q infra verticem, ab eodem distante per  $\frac{1}{2}b$ , sive per  $-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ . Fig. II.

Si verò esset æqualis  $a$ , invenietur, ut diximus, Fig. III. ad circulum æquatio  $-x^2 + \frac{1}{2}x \propto y^2$ , & ejus centrum erit in orthogonali ducta è verticis puncto B, ut ex constructionibus patet.

Idem quoque observare licet in cæteris æquationum trium, & quatuor graduum constructionibus, nam quando quantitas cognita secundi termini in ea parte, ubi est  $y^2$ , afficitur signo +, axis vel diameter parabolæ ultrà verticis punctum est producendus, & portio ipsius supra verticem, sumenda æqualis dimidio quantitatis notæ, quando verò afficitur signo -, citrà verticem in axe, vel diametro sumenda est eadem portio, & per ipsius terminum, sive ultrà, sive citrà, diameter circuli ducendus; si autem secundus terminus abfuerit, tunc per verticem parabolæ diameter circuli transibit

sibit, & hoc ex ipsis æquationum constructionibus clarius constabit.

Sed progrediamur ad demonstrationem positæ constructionis.

Quia MK, sive KL est  $\propto \sqrt{e^2}$ , sive  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}f^2}$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ , KQ  $\propto \frac{1}{2}f$ , & AE, sive IQ  $\propto x$ , erit MI  $\propto \sqrt{e^2} - \frac{1}{2}f + x$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}f^2} - \frac{1}{2}f + x$ , nimirum  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2} - \frac{1}{2}f + x$ , ac proinde IL  $\propto \sqrt{e^2} + \frac{1}{2}f - x$ , scilicet  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}f^2} + \frac{1}{2}f - x$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2} + \frac{1}{2}f - x$ . Rursum, quia AE  $\propto x$ , erit ex parabolæ proprietate, portio axis EB  $\propto x^2$ ; si igitur huic axis portioni addatur portio suprâ verticem BQ  $\propto \frac{1}{2}b$ , scilicet  $\propto \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ , erit tota EQ, sive AI  $\propto x^2 + \frac{1}{2}b$ , scilicet  $\propto x^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ . Cum igitur propter circulum, quadratum ex AI sit æquale rectangulo ex MI in IL, erit  $x^4 + bx^2 + \frac{1}{4}b^2 \propto -x^2 + fx + e^2 - \frac{1}{4}f^2$ , scilicet  $x^4 + bx^2 + \frac{1}{4}b^2 \propto -x^2 + fx + \frac{1}{4}b^2$ , idest  $x^4 + rx^2 + \frac{1}{4}r^2 \propto -x^2 + fx + \frac{1}{4}r^2$ ,  

$$\begin{array}{rcc} -1 & -\frac{1}{2}r & -\frac{1}{2}r \\ & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} \end{array}$$

& deletis cōmunibus quantitibus, emerget æquatio  $x^4 + rx^2 \propto fx$ , hoc est  $x^3 \propto -rx + f$ . Q. E. D.

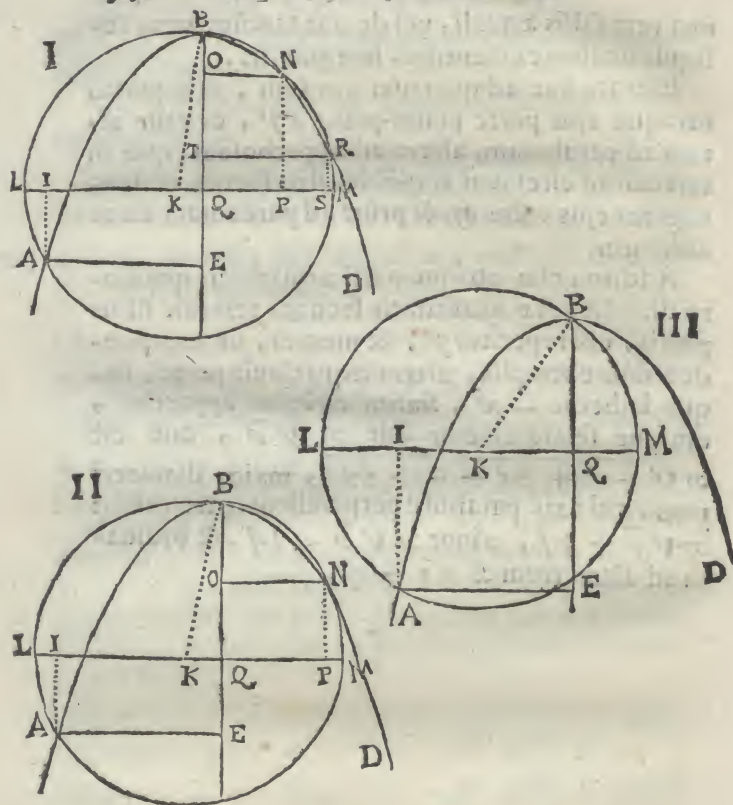
Proponatur nunc æquatio  $x^3 \propto * + rx + f$ , de tribus explicabilis radicibus, duabus falsis, & una



una vera falsis æquali, vel de una tantum vera, reliquis duabus existentibus imaginariis.

Elevata hac ad quartum gradum, & æquata utraque ejus parte plano-plano  $ay^2$ , orietur altera ad parabolam, altera ad hyperbolam, quæ in tertiam ad circulum transibit, si in locum  $x^2$  subrogetur ejus valor  $ay$ , & prior ad parabolam ex ea auferatur.

Addito enim utrique parti æquationis quadrato dimidii notæ quantitatis secundi termini illius partis, ubi reperitur  $y^2$ , & mutata, ut in præcedentibus exemplis, altera æquationis parte, in qua habetur  $-x^2$ , statim circulus apparebit, ejusque semidiameter erit  $\propto \sqrt{e^2}$ , hoc est  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ , major diametri pars, cui axis parabolæ perpendiculariter insistit  $\propto \sqrt{e^2 + \frac{1}{2}f}$ , minor  $\propto \sqrt{e^2 - \frac{1}{2}f}$ , & ordinata ad diametrum  $\propto \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ .



Describatur pro constructione ex hac resolutione deducta, quæ in omnibus cum Cartesiana congruit, parabola, cujus parameter  $a$ , sive unitas, sumatur portio axis BQ infra verticem  $\propto \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$ , ducaturque ex puncto Q orthogonalis QK  $\propto \frac{1}{2}f$ , quæ producaturs usque ad L, ita ut KL sit  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}f^2}$ ; postmodum centro



tro K, & intervallo KL describatur circulus, hic per parabolæ verticem transibit, & in tribus præterea punctis A, N, R, eam secabit, vel in duobus A, & N, quod accidit cum falsæ radices inter se æquantur (tunc enim puncta N, & R, congruunt, & circulus ibi parabolam tangit) vel demum in unico puncto A, si loco falsarum radicum, imaginariæ existant; quod mirum est non vidisse Cartesium, qui pro veræ radices explicatione ad Cardani regulam eò casu confugit.

Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

Si ergo ex his punctis ordinatæ ducantur, erunt hæ propositæ æquationis radices. AE veræ, & NO, RT: vel NO bis sumpta, falsæ.

Hæc tamen æquatio tunc erit de tribus explicabilis radicibus, cum cubus tertiæ partis quantitatis notæ penultimi termini major est quadrato ex dimidio ultimi, nimirum  $\frac{1}{27} r^3$  major quàm  $\frac{1}{4} s^2$ , vel  $\frac{4}{27} r^3$ , quàm  $s^2$ , sive  $\sqrt{\frac{4}{27} r^3}$  major  $s$ ; nam si minor esset, de unica tantum vera radice foret explicabilis, & reliquæ duæ imaginariæ existerent; si verò æqualis, falsæ radices inter se tunc æquarentur, & parabolam circulus in altero puncto secaret, in altero verò contingeret.

Id autem oritur ex natura æquationis, plures habentis radices, ex qua patet notam quantitatem secundi termini æqualem esse summæ radicum, tertii aggregato productorum ex singulis binis, quarti summæ productorum ex singulis ternis, atque ita deinceps. Demum ultimum terminum æqualem producto ex radicibus omnibus.

Quod jam explicavimus habetur etiam ex doctrina de Maximis, & Minimis, quam nuper

E 2

Anto-

Antonius Monfortius, vir omni literarum generatissimus, in suo de Problematum Determinatione tractatu, facili, & nova methodo illustravit; per illam enim constat, si quantitas secetur in duas partes, quarum altera sit dupla alterius, maximum solidum esse productum ex quadrato maioris in minorem; propterea  $\frac{2}{3}r$  in  $\sqrt{\frac{1}{3}r}$ , scilicet  $\sqrt{\frac{4}{27}r^3}$  maximum esse, ac proinde superari non debere ab ultimo termino  $f$ , hoc est à producto ex tribus propositæ æquationis radicibus.

In cōment.  
Cartes.  
Geom.

Supereſt nunc demonſtrandum veram propositæ æquationis radicem esse AE, falsas NO, & RT; easque veræ æquales; sed quia facilè hoc habetur ex præcedentibus exemplis, & ex demonstratis per Franciscum à Schooten, ad aliam progredimur æquationem  $x^3 \propto * + rx - f$ , de tribus similiter explicabilem radicibus, una falsa, & duabus veris, falsæ æqualibus, vel de una tantum falsa, reliquis existentibus imaginarijs.

Hæc ortum suum habet ex problemate de divisione anguli, sive arcus circuli in tres æquales partes, & posita  $a$ , sive unitate pro radio,  $r$  pro 3 nota quantitate tertii termini,  $f$  pro subtensa arcus dati, &  $x$  pro subtensa arcus quaesiti, habebitur ejus constructio eadem fermè ratione, ac præcedens, & cum Cartesiana in omnibus similiter conveniet, non aliter, ac constructio problematis de duabus medio loco proportionalibus.

Neque solum quæ observavimus in præcedenti constructione, locum hîc habent, sed nulla discrepantia inter illam, & hanc deprehenditur,  
nisi



nisi quòd radix, quæ ibi est vera, falsa hìc reperitur, & quæ illic falsæ, veræ hìc habentur.

Hoc autem indicare videtur signum  $-f$  diversum ab illo in præcedenti  $+f$ , undè fortè Cartesio innotuit, veras radices æquationum, in quibus ultimus terminus afficitur signo  $+$ , esse ordinatas ductas ex parabolæ parte, ubi est circuli centrum; æquationum verò in quibus ultimus terminus reperitur affectus signo  $-$ , veras esse ordinatas ex altera parte ductas, falsas autem è contra.

Caterùm si proponatur æquatio  $x^3 \propto * -rx - f$ , de unica tantum falsa radice explicabilis, reliquis imaginariis existentibus; hæc absque ope regulæ Cardani, eadem ratione constructur, ac  $x^3 \propto * -rx + f$ , secundo loco proposita; neque in alio hæc constructio ab illa discrepabit, nisi quòd ubi illic fuit inventa una radix vera, hìc comprehenditur una falsa.

Eadem similiter ratione cōstrui poterunt ceteræ æquationes trium, & quatuor dimensionum, quarum formulas afferre iis, qui in hac re exerceri vo-  
luerint, superfluum non existimo.

$x^3 \propto f$	$x^3 \propto + qx^2 - rx + f$
$x^3 \propto * - rx + f$	$x^3 \propto - qx^2 + rx + f$
$x^3 \propto * + rx + f$	$x^3 \propto + qx^2 + rx + f$
$x^3 \propto * + rx - f$	$x^3 \propto - qx^2 - rx + f$
$x^3 \propto * - rx - f$	$x^3 \propto + qx^2 - rx - f$
$x^3 \propto - qx^2 * + f$	$x^3 \propto - qx^2 + rx - f$
$x^3 \propto + qx^2 * + f$	$x^3 \propto + qx^2 + rx - f$
$x^3 \propto + qx^2 * - f$	$x^3 \propto - qx^2 - rx - f$
$x^3 \propto - qx^2 * - f$	

$x^4$

$$\begin{aligned} x^4 \infty * * + rx - f \\ x^4 \infty * * + rx + f \\ x^4 \infty * * - rx + f \\ x^4 \infty * * - rx - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty - px^3 * * + f \\ x^4 \infty + px^3 * * + f \\ x^4 \infty + px^3 * * - f \\ x^4 \infty - px^3 * * - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty * - qx^2 * + f \\ x^4 \infty * + qx^2 * + f \\ x^4 \infty * + qx^2 * - f \\ x^4 \infty * - qx^2 * - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty * + qx^2 - rx + f \\ x^4 \infty * - qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty * + qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty * - qx^2 - rx + f \\ x^4 \infty * + qx^2 - rx - f \\ x^4 \infty * - qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty * + qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty * - qx^2 - rx - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty + px^3 - qx^2 * + f \\ x^4 \infty - px^3 + qx^2 * + f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 * + f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 * + f \\ x^4 \infty + px^3 - qx^2 * - f \\ x^4 \infty - px^3 + qx^2 * - f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 * - f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 * - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty + px^3 * - rx + f \\ x^4 \infty - px^3 * + rx + f \\ x^4 \infty + px^3 * + rx + f \\ x^4 \infty - px^3 * - rx + f \\ x^4 \infty + px^3 * - rx - f \\ x^4 \infty - px^3 * + rx - f \\ x^4 \infty + px^3 * + rx - f \\ x^4 \infty - px^3 * - rx - f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 \infty + px^3 - qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty + px^3 - qx^2 - rx - f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 - rx - f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty - px^3 + qx^2 + rx - f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 - rx - f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 - rx - f \\ x^4 \infty + px^3 - qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty + px^3 - qx^2 - rx + f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty + px^3 + qx^2 - rx + f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty - px^3 - qx^2 - rx + f \\ x^4 \infty - px^3 + qx^2 + rx + f \\ x^4 \infty - px^3 + qx^2 - rx + f \end{aligned}$$

Præ-



Præterea si quis methodum hanc in planis æquationibus compositis experiri voluerit, non quidem inutilem inueniet, quamquam aliæ paratiores apud alios non desint.

Sint formulæ planarum æquationum.

$$x^2 \propto + px - q$$

$$x^2 \propto + px + q$$

$$x^2 \propto - px + q$$

$$x^2 \propto - px - q$$

Ponatur construenda prima formula  $x^2 \propto px - q$ , de duabus explicabilis veris radicibus.

Elevata hac æquatione ad quartum gradum, atque addito utrique parti quadrato ex latere  $\frac{1}{2} px$ , ut una æquationis pars constituat quadratum, habebitur  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 \propto - qx^2$

$$+ \frac{1}{4} p^2$$

Sumpto deinde plano-plano  $a^2 y^2$ , inuenientur æquationes  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 \propto a^2 y^2$ , scilicet  $x^2 - \frac{1}{2} px \propto ay$  ad parabolam, quæ si addatur propositæ æquationi  $x^2 \propto px - q$ , hoc est  $px - x^2 \propto q$ , mutabitur in  $\frac{1}{2} px \propto ay + q$  ad rectam lineam, &  $- qx^2 \propto y^2$  ad hyperbolam, si qua-

$$+ \frac{1}{4} p^2$$

dratum dimidii quantitatis notæ secundi termini majus sit ultimo termino, scilicet  $\frac{1}{4} p^2$  majus  $q$ ; nam si minus foret, impossibilis esset constructio, & pro veris radicibus imaginariæ haberentur; si verò æquale, ultimus terminus destrueretur, & ex plana, simplex fieret æquatio. Atque hoc patet, non solum ex doctrina de Maximis ab Euclide in Elementis <sup>28. secti.</sup> indicata, per quam constat quadratum prædictum maximum esse rectangulorum omnium, quæ ex sectione ipsius quantitatis  $p$ , hoc est summæ radicum

in

in duas partes oriri possunt, sed etiā ex ipsa æqua-  
tione, —  $qx^2 \propto y^2$ , nam si  $q$  major foret, vel  
 $+\frac{1}{4}p^2$

æquale  $\frac{1}{4}p^2$ , quantitas  $y^2$ , vel nihilo minor esset,  
vel nihilo æquaretur, quod *αδυναμία* arguit.

Sed ut ex hyperbola ad circulum transitus fiat,  
eodem, quo suprà, modo ultrà procedendo, habe-  
bimus æquationem

$$\begin{array}{rcl} -x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}q^2 \propto y^2 - \frac{1}{4}p^2y + \frac{1}{4}q^2; \\ -\frac{1}{2}qp - \frac{1}{8}p^2q + q - \frac{1}{8}p^2q \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{2}q = a - \frac{1}{2}q \\ + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{64}p^4 \\ + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{8}p^2 \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{array}$$

& mutata illius parte, ubi habetur  $-x^2$  in

$$\begin{array}{rcl} -x^2 + \frac{1}{2}px + e^2 \propto y^2 - \frac{1}{4}p^2y + \frac{1}{4}q^2; \\ -\frac{1}{2}qp - \frac{1}{256}p^6 + q - \frac{1}{8}p^2q \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{32}p^4 - a - \frac{1}{2}q \\ + \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{64}p^4 \\ - \frac{1}{16}p^2 + \frac{1}{8}p^2 \\ + \frac{1}{8}qp^2 + \frac{1}{4} \\ - \frac{1}{16}q^2p^2 \end{array}$$

eius semidiameter erit  $\propto \sqrt{e^2}$ , nimirum

$$\begin{array}{l} \propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{8}p^2q - \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2} \\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{256}p^6 + \frac{1}{32}p^4 - \frac{1}{32}qp^4 + \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{16}q^2p^2, \text{ major diametri pars, } \propto \sqrt{e^2 + \frac{1}{16}p^3} \\ + \frac{1}{8}p - \frac{1}{4}qp, \text{ minor } \propto \sqrt{e^2 - \frac{1}{16}p^3} - \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}qp; \\ \& \end{array}$$



& ordinata ad diametrum  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{8}p^2q - \frac{1}{2}q + \frac{1}{64}p^4 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}}$ , hoc est  $\propto \frac{1}{2}q - \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{2}$ .  
Atque ita constructio propositæ æquationis rectæ, & circuli beneficio habebitur.

Progrediamur jam ad constructionem æquationum altiorum graduum.

Proponatur construenda æquatio sex dimensionum, in qua nullus terminus deficiat.

Primo ad quintum gradum deprimatur, hoc est ad  $x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t \propto 0$

Deinde ad sextum gradum revocetur, nimirum ad  $x^6 - px^5 + qx^4 - rx^3 + sx^2 - tx \propto 0$ , scilicet  $x^6 \propto px^5 - qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx$ .

Postmodum, ut evanescat secundus æquationis terminus, formetur quadratum ex latere  $x^3 - \frac{1}{2}px^2$ , idest  $x^6 - px^5 + \frac{1}{4}p^2x^4$ , addaturque utrique parti æquationis portio  $-px^5 + \frac{1}{4}p^2x^4$ , & habebitur  $x^6 - px^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 \propto px^5 - qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx$ ,  
 $-p + \frac{1}{4}p^2$

sive  $x^6 - px^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 \propto -qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx + \frac{1}{4}p^2$

Demum utrique ejus parti fiat æqualis potestas  $a^2y^2x^2$ , sumpta  $a$  pro unitate, & duæ inveniuntur æquationes,  $x^6 - px^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 \propto a^2y^2x^2$ , scilicet  $x^3 - \frac{1}{2}px^2 \propto ayx$ , sive  $x^2 - \frac{1}{2}px \propto ay$  ad planam parabolam, &  $-qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx \propto a^2y^2x^2 + \frac{1}{4}p^2$

F

sci-

$$\text{scilicet} - qx^3 + rx^2 - fx + t \propto a'y^2x, \\ + \frac{1}{4}p^2$$

$$\text{nimirum} - aqx^3 + a^2rx^2 - a^3fx + a^4t \propto a^2y^2x, \\ + \frac{1}{4}p^2$$

$$\text{hoc est} - \frac{q}{a}x^3 + rx^2 - afx + a^2t \propto y^2x \\ + \frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2}$$

ad curvam tertii gradus, sive cubicam hyperbolam.

Hac igitur methodo, beneficio planæ parabolæ, & cubicæ hyperbolæ æquatio proposita facilè construi poterit.

Sed si pro quadrato ex latere  $x^3 - \frac{1}{2}px^2$ , fingatur quadratum ex altero latere  $x^3 - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}qx$ ,  
 $- \frac{1}{8}p^2$

regula mox explicanda, invento, ut secundus, & tertius terminus propositæ æquationis destruantur, eorumdem graduum curvæ pro construenda æquatione reperientur.

Sic igitur quadratum ex præfato latere

$$x^6 - px^5 + qx^4 - \frac{1}{2}pqx^3 + \frac{1}{4}q^2x^2. \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

Addatur utrique parti æquationis portio ipsius

$$- px^5 + qx^4 - \frac{1}{2}pqx^3 + \frac{1}{4}q^2x^2, \text{ \& habebitur} \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

alte-



$$\text{altera æquatio } x^6 - px^5 + qx^4 - \frac{1}{2}pqx^3 + \frac{1}{4}q^2x^2 \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

$$\propto px^5 - qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx, \\ -p + q - \frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2 \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

$$\text{nimirum } x^6 - px^5 + qx^4 - \frac{1}{2}pqx^3 + \frac{1}{4}q^2x^2 \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

$$\propto rx^3 - sx^2 + tx. \\ -\frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2 \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

Æquetur deinde utrique parti potestas  $ay^2x^2$ ,  
& invenientur æquationes,

$$x^6 - px^5 + qx^4 - \frac{1}{2}pqx^3 + \frac{1}{4}q^2x^2 \propto ay^2x^2, \\ + \frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2 \\ + \frac{1}{64}p^4$$

$$\text{scilicet } x^3 - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}qx \propto ayx, \\ - \frac{1}{8}p^2$$

$$\text{five } x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{2}q \propto ay, \text{ ad planam parabolam,} \\ - \frac{1}{8}p^2$$

&  $rx^3 - fx^2 + tx \propto a^2y^2x^2,$

$$-\frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2$$

$$+\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2$$

$$+\frac{1}{64}p^4$$

ideft  $rx^2 - fx + t \propto a^2y^2x,$

$$-\frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2$$

$$+\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}qp^2$$

$$+\frac{1}{64}p^4$$

nimirum  $a^2rx^2 - a^2fx + a^2t \propto a^2y^2x,$

$$-\frac{1}{2}apq + \frac{1}{4}a^2q^2$$

$$+\frac{1}{8}p^3 - \frac{1}{8}aqp^2$$

$$+\frac{1}{64}p^4$$

hoc est  $rx^2 - afx + a^2t \propto y^2x,$

$$-\frac{1}{2}\frac{pq}{a} + \frac{1}{4}q^2$$

$$+\frac{1}{8}\frac{p^3}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{qp^2}{a}$$

$$+\frac{1}{64}\frac{p^4}{a^2}$$

ad curvam tertii gradus, five secundi generis.

Demum si pro quadrato ex  $x^3 - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}qx,$

$$-\frac{1}{8}p^2$$

formetur quadratū ex  $x^3 - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}qx - \frac{1}{2}r,$

$$-\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}pq$$

$$-\frac{1}{16}p^3$$

ut



ut tres æquationis termini  $px^5 - qx^4 + rx^3$  evanescant, eorundem graduum curvis æquationis constructio perficietur, verum prior æquatio

$$x^3 - \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{2} qx - \frac{1}{2} r \propto ay,$$

$$- \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{4} pq$$

$$- \frac{1}{16} p^3$$

erit ad curvam tertii gradus, & posterior

$$- \frac{1}{a} x^2 + rx + \frac{1}{4} r^2 \propto y^2,$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{qr}{a} - \frac{1}{4} \frac{pqr}{a}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{pr}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{pq^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{p^3r}{a^2}$$

$$- \frac{3}{8} \frac{qp^2}{a^3} + \frac{1}{8} \frac{p^2r}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{p^2q^2}{a^2}$$

$$+ \frac{5}{64} \frac{p^4}{a^4} - \frac{1}{8} \frac{qp^3}{a^3} - \frac{1}{32} \frac{qp^4}{a^3}$$

$$+ \frac{1}{64} \frac{p^5}{a^4} + \frac{1}{256} \frac{p^6}{a^4}$$

ad curvam secundi, sumpta communi potestate  $ay^2$ ; nam si ea foret  $a^2y^2x^2$ , invenietur prior æquatio

$$x^3 - \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{2} qx - \frac{1}{2} r \propto ayx,$$

$$- \frac{1}{8} p^2 + \frac{1}{4} pq$$

$$- \frac{1}{16} p^3$$

ad curvam tertii gradus, & posterior, nimirum

rum

$$\begin{aligned}
 \text{rum} \quad & - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x} + \frac{1}{4} a^2 r^2 \propto y^2 x^2 ; \\
 & + \frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{2} aqr - \frac{1}{4} apqr \\
 & + \frac{1}{2} pr + \frac{1}{4} pq^2 + \frac{1}{16} p^2 r \\
 & - \frac{3}{8} \frac{qp^2}{a} + \frac{1}{8} p^2 r + \frac{1}{16} p^2 q^2 \\
 & + \frac{5}{64} \frac{p^4}{a^2} - \frac{1}{8} \frac{qp^3}{a} - \frac{1}{32} \frac{qp^4}{a} \\
 & + \frac{1}{64} \frac{p^5}{a^2} + \frac{1}{256} \frac{p^6}{a^2}
 \end{aligned}$$

ad curvam quarti, atque ita proprius pro constructione locus non habebitur.

Eadem ratione construi poterunt ceteræ æquationes sex dimensionum.

Proponatur nunc æquatio quinque graduum, secundo carens termino.

Hæc methodo tradita facilius constructur; etenim nulla tunc requiritur depressio, aut fictio quadrati ex aliquo latere, sed tantum ad parem gradum erit æquatio elevanda.

Sit ea igitur  $x^5 * - 5x^3 * + 5x - q \propto 0$ , quæ oritur ex problemate sectionis anguli, sive arcûs circuli in quinque æquales partes

Extollatur primò ad parem gradum,

ut fiat  $x^6 * - 5x^4 * + 5x^2 - qx \propto 0$ ,

scilicet  $x^6 \propto * + 5x^4 * - 5x^2 + qx$ ,

nimirum  $x^6 \propto * + qx^4 * - fx^2 + tx$ , positis pro primo numero 5 litera  $q$ , pro altero numero 5 litera  $f$ , & pro subtensa arcûs dati, sive ultimo termino  $q$ , litera  $t$ .

Ponatur deinde utraque ejus pars æqualis potestati



flati  $a^2y^2x^2$ , & emergent æquationes  $x^6 \propto a^2y^2x^2$ ,  
scilicet  $x^3 \propto ayx$ , nimirum  $x^2 \propto ay$  ad planam  
parabolam, &  $qx^4 - fx^2 + tx \propto a^2y^2x^2$ , hoc est  
 $qx^3 - fx + t \propto a^2y^2x$ , scilicet  $\frac{qx^3}{a} - afx + a^2t$   
 $\propto y^2x$ , ad curvam tertii gradus, five cubicam hy-  
perbolam.

Quòd si fingatur quadratum ex latere  $x^3 - \frac{1}{2}qx$ ,  
& ut destruaturs terminus  $qx^4$ , utrique parti  
æquationis addatur portio ipsius  $-qx^4 + \frac{1}{4}q^2x^2$ ,  
eorundem graduum curvæ pro constructione in-  
venientur.

Quoniam æquatio juxtà methodum deducta, est  
 $x^6 - qx^4 + \frac{1}{4}q^2x^2 \propto qx^4 - fx^2 + tx$ ,  
 $-q + \frac{1}{4}q^2$   
five  $x^6 - qx^4 + \frac{1}{4}q^2x^2 \propto -fx^2 + tx$ , sum-

pta communi potestate  $a^2y^2x^2$ , emergent æquatio-  
nes  $x^6 - qx^4 + \frac{1}{4}q^2x^2 \propto a^2y^2x^2$ , idest  $x^3 - \frac{1}{2}qx$   
 $\propto ayx$ , hoc est  $x^2 - \frac{1}{2}q \propto ay$ , ad planam parabo-  
lam, &  $-fx^2 + tx \propto a^2y^2x$ , scilicet  $-fx + t$   
 $+ \frac{1}{4}q^2$   
 $\propto a^2y^2x$ , nimirum  $afx + a^2t \propto a^2y^2x$ , hoc est  
 $+ \frac{1}{4}a^2q^2$   
 $-afx + a^2t \propto y^2x$  ad curvam tertii gradus.  
 $+ \frac{1}{4}q^2$

Sed

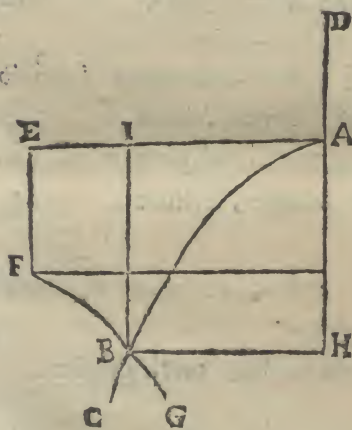
Sed si communis potestas esset  $a^4y^2$ , invenien-  
tur  $x^3 - \frac{1}{2}qx \propto a^2y$  ad curvam tertii gradus,

$$\& - \frac{\frac{1}{2}q^2}{a}x^2 + tx \propto y^2 \text{ ad curvam secundi.}$$

$$+ \frac{\frac{1}{4}q^2}{a^2}$$

Rursus proponatur æquatio nullum habens inter-  
positum terminum  $x^5 \propto a^4p$ , quæ oritur ex pro-  
blemate de quatuor medijs proportionalibus inter  
datas  $a$ , &  $p$  inveniendis.

Exaltetur hæc ad parem gradum, & utraque  
ejus pars ponatur æqualis potestati  $a^2y^2x^2$ ; emergēt  
juxtā methodum æquationes  $x^6 \propto a^2y^2x^2$ , hoc est  
 $x^3 \propto ayx$ , sive  $x^2 \propto ay$  ad planam parabolam,  
&  $a^4px \propto a^2y^2x^2$ , scilicet  $a^2p \propto y^2x$  ad hyper-  
bolam secundi gradus, ex quibus constructio fa-  
cillimè deducitur,



Describatur plana  
parabola ABC, cujus  
parameter AD, sive  
a prima ex datis; Du-  
catur deinde ex ver-  
ticis pūcto A ortho-  
gonalis AE æqualis  
p alteri ex datis, at-  
que ex E pūcto EF  
parallela axi para-  
bolæ, parametro  
æqualis; Demum,  
ex F pūcto, Asym-  
ptotis EA, AH, de-  
scri-



Scribatur hyperbola secundi gradus, in qua datæ EF quadratum ad quadratum ex IB, sive AH in eadem sit ratione, ut indeterminata BH, sive IA ad alteram ex datis EA. Et quoniam hæc hyperbola descriptam parabolam in puncto B secat, si ordinata BH fuerit ex co ducta, erit illa propositæ æquationis radix, ac proinde prima ex quatuor mediis, quod ita demonstratur.

Quia BH inventa est  $\propto x$ , erit per parabolam AH  $\propto \frac{x^2}{a}$ . Quia similiter per descriptam hyperbolam, quadratum ex AH, sive IB, scilicet  $\frac{x^4}{a^2}$  ad quadratū ex EF, sive  $a^2$  eandem habet rationem, quam recta AE, sive  $p$  ad rectam BH  $\propto x$ , erit  $\frac{x^5}{a^2} \propto a^2 p$ , hoc est  $x^5 \propto a^2 p$ . Q. E. D.

Aliter hoc demonstrari potest ex æquationibus, deductis ab illa, quam primo loco construendam proposuimus.

Quia parabolæ parameter est  $\propto a$ , BH ordinata  $\propto x$ , & portio axis AH  $\propto y$ , erit propter eam  $x^2 \propto ay$ . Rursus quia per descriptæ hyperbolæ proprietatem est  $y^2$  ad  $a^2$ , ut  $p$  ad  $x$ , erit  $y^2 x \propto a^2 p$ . Q. E. D.

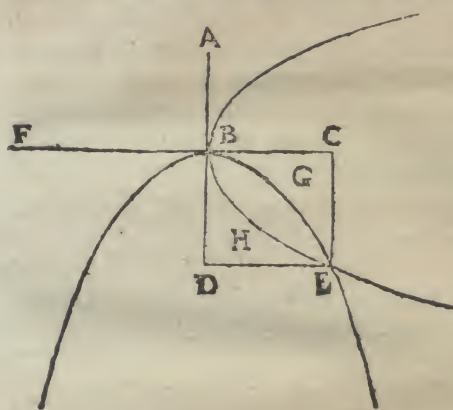
Atque hæc est propositi problematis constructio, quæ inveniri poterat absque exaltatione æquationis ad sextum gradum, sumpta tantummodo potestate  $a^2 y^2 x$ , utrique ejus parti æquali.

Quod si, elevata ad sextum gradum æquatione, communis potestas esset  $a^4 y^2$ , orietur constructio à præcedenti diversa, duarum ope parabolarum,

G

pla-

planæ nimirum, & cubicæ, quarum æquationes erunt  $px \propto y^2$ , &  $x^3 \propto a^2y$ .



Positis igitur ad rectos angulos rectis  $AB \propto a$ , &  $BF \propto p$ , si puncto B communi vertice, describatur plana parabola BGE, cujus parameter BF, & cubica BHE ejus proprietatis, ut

cubus ordinatæ æquetur solido ex quadrato parametri AB in axis portionem ab ordinata interceptam; si postea ducatur ordinata EC ex puncto E, in quo hæ parabola se interfecant, erit ea prima ex quæsitis mediis, ac proinde radix propositæ æquationis, quod ita demonstratur.

Quia CE est  $\propto x$ , erit propter parabolam cubicam BC, sive DE ordinata ad planam  $\propto \frac{x^3}{a^2}$ ,

ac ideo per proprietatem ipsius  $\frac{x^6}{a^4} \propto px$ , hoc est  $x^6 \propto a^4px$ , nimirum  $x^5 \propto a^4p$ . Q. E. D.

Ex his manifestum sit methodum, qua utimur; non solum in constructionibus æquationum trium, & quatuor dimensionum, sed etiam in aliis quinque, sex, & altiorum graduum faciliorem esse illa,



illa, quam adhibet Cartesius pro construendis similibus æquationibus, atque simpliciore cā, quam Fermatius affert; Cum enim duas omnino tertii gradus curvas pro hisce æquationibus hic Author requirat, unicam tantum nobis nostra methodus suggerit, quæ cum altera secundi gradus se intersecans, rem feliciter perficit.

*In fine sua  
Geometriae.*

*In Dissert.  
contra Cap.  
sef. part. 2.*

Demum ut pateat hujus methodi amplitudo, proponatur construenda æquatio octo dimensionum, in qua omnes extent termini.

Depressa hac ad septimum, & rursus ad octavum gradum revocata, ut pares habeat æquatio dimensiones, erit

$$x^8 - ox^7 + px^6 - qx^5 + rx^4 - sx^3 + tx^2 - ux \infty 0,$$

$$\text{five } x^8 \infty ox^7 - px^6 + qx^5 - rx^4 + sx^3 - tx^2 + ux.$$

Postmodum efficto quadrato ex latere

$$x^4 - \frac{1}{2} ox^3 + \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{4} opx,$$

$$= \frac{1}{8} o^2 - \frac{1}{16} o^3$$

$$- \frac{1}{2} q$$

scilicet

$$x^8 - ox^7 + px^6 - qx^5 + \frac{1}{4} p^2 x^4 + \frac{1}{4} op^2 x^3 + \frac{1}{4} q^2 x^2,$$

$$- \frac{1}{8} o^2 p - \frac{1}{8} o^3 p + \frac{1}{16} o^3 p^2$$

$$+ \frac{5}{64} o^4 - \frac{1}{2} pq - \frac{1}{32} o^4 p$$

$$+ \frac{1}{2} oq + \frac{1}{64} o^5 - \frac{1}{4} opq$$

$$+ \frac{1}{4} o^2 q + \frac{1}{256} o^6$$

$$+ \frac{1}{16} o^3 q$$

ut destruantur tres termini  $ox^7 - px^6 + qx^5$ ; si utrique parti æquationis addatur portio ipsius

$$G \quad 2 \quad -x^7$$

$$\begin{aligned}
 &= ox^7 + px^6 - qx^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 + \frac{1}{4}op^2x^3 + \frac{1}{4}q^2x^2 \\
 &\quad - \frac{3}{8}o^2p - \frac{1}{8}o^3p + \frac{1}{16}o^2p^2 \\
 &\quad + \frac{5}{64}o^4 - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{32}o^4p \\
 &\quad + \frac{1}{2}oq + \frac{1}{64}o^5 - \frac{1}{4}opq \\
 &\quad \quad + \frac{1}{8}o^2q + \frac{1}{256}o^5 \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{16}o^3q
 \end{aligned}$$

habebitur

$$\begin{aligned}
 x^8 &= ox^7 + px^6 - qx^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 + \frac{1}{4}op^2x^3 + \frac{1}{4}q^2x^2 \\
 &\quad - \frac{3}{8}o^2p - \frac{1}{8}o^3p + \frac{1}{16}o^2p^2 \\
 &\quad + \frac{5}{64}o^4 - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{32}o^4p \\
 &\quad + \frac{1}{2}oq + \frac{1}{64}o^5 - \frac{1}{4}opq \\
 &\quad \quad + \frac{1}{8}o^2q + \frac{1}{256}o^5 \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{16}o^3q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^8 &= rx^4 + sx^3 = tx^2 + vx; \\
 &\quad + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}op^2 + \frac{1}{4}q^2 \\
 &\quad - \frac{3}{8}o^2p - \frac{1}{8}o^3p + \frac{1}{16}o^2p^2 \\
 &\quad + \frac{5}{64}o^4 - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{32}o^4p \\
 &\quad + \frac{1}{2}oq + \frac{1}{64}o^5 - \frac{1}{4}opq \\
 &\quad \quad + \frac{1}{8}o^2q + \frac{1}{256}o^5 \\
 &\quad \quad \quad + \frac{1}{16}o^3q
 \end{aligned}$$

Si deinde sumpta  $a$  pro unitate; ponatur utri-  
que parti æqualis potestas  $a^4y^2x^2$ , fient æquatio-  
nes



ÆQUATIONUM 53

$$\begin{aligned} x^6 - ox^7 + px^6 - qx^5 + \frac{1}{4}p^2x^4 + op^2x^3 + q^2x^2 \propto a^2y^2x^2 \\ - \frac{3}{8}o^2p - \frac{1}{8}o^3p + \frac{1}{16}o^2p^2 \\ + \frac{5}{64}o^4 - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{32}o^4p \\ + \frac{1}{2}oq + \frac{1}{64}o^5 - \frac{1}{4}opq \\ + \frac{1}{8}o^2q + \frac{1}{256}o^6 \\ + \frac{1}{16}o^3q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{scilicet } x^4 - \frac{1}{2}ox^3 + \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{4}opx \propto a^2yx, \\ - \frac{1}{8}o^2 - \frac{1}{16}o^3 \\ - \frac{1}{2}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hoc est } x^3 - \frac{1}{2}ox^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}op \propto a^2y \\ - \frac{1}{8}o^2 - \frac{1}{16}o^3 \\ - \frac{1}{2}q \end{aligned}$$

ad curvam tertii gradus.

$$\begin{aligned} \text{Et } -rx^4 + fx^3 - ex^2 + vx \propto a^2yx^2, \\ + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}op^2 + \frac{1}{4}q^2 \\ - \frac{3}{8}o^2p - \frac{1}{8}o^3p + \frac{1}{16}o^2p^2 \\ + \frac{5}{64}o^4 - \frac{1}{2}pq - \frac{1}{32}o^4p \\ + \frac{1}{2}oq + \frac{1}{64}o^5 - \frac{1}{4}opq \\ + \frac{1}{8}o^2q + \frac{1}{256}o^6 \\ + \frac{1}{16}o^3q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{id est } = a^2rx^4 + a^2fx^3 - a^2ex^2 + a^2vx \propto a^2yx^2, \\ + \frac{1}{4}a^2p^2 + \frac{1}{4}a^2op^2 + \frac{1}{4}a^2q^2 \\ - \frac{3}{8}a^2o^2p - \frac{1}{8}a^2o^3p + \frac{1}{16}a^2o^2p^2 \\ + \frac{5}{64}a^2o^4 - \frac{1}{2}a^2pq - \frac{1}{32}a^2o^4p \\ + \frac{1}{2}a^2oq + \frac{1}{64}a^2o^5 - \frac{1}{4}a^2opq \\ + \frac{1}{8}a^2o^2q + \frac{1}{256}a^2o^6 \\ + \frac{1}{16}a^2o^3q \end{aligned}$$

q1.

$$\text{pimiru} = \frac{r}{a} x^4 + f x^3 - a t x^2 + a^2 v x p y x^2$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{op^2}{a^2} + \frac{1}{4} q^2 \\ & - \frac{3}{8} \frac{o^2 p}{a^3} - \frac{1}{8} \frac{o^3 p}{a^3} + \frac{1}{16} \frac{o^2 p^2}{a^2} \\ & + \frac{5}{64} \frac{o^4}{a^4} - \frac{1}{2} \frac{pq}{a} - \frac{1}{32} \frac{o^4 p}{a^3} \\ & + \frac{1}{2} \frac{oq}{a^2} + \frac{1}{64} \frac{o^5}{a^4} - \frac{1}{4} \frac{opq}{a} \\ & + \frac{1}{8} \frac{o^2 q}{a^2} + \frac{1}{256} \frac{o^6}{a^4} \\ & + \frac{1}{16} \frac{o^3 q}{a^2} \end{aligned}$$

$$\text{hoc est} = \frac{r}{a} x^4 + f x^3 - a t x^2 + a^2 v x p y x^2$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{op^2}{a^2} + \frac{1}{4} q^2 \\ & - \frac{3}{8} \frac{o^2 p}{a^3} - \frac{1}{8} \frac{o^3 p}{a^3} + \frac{1}{16} \frac{o^2 p^2}{a^2} \\ & + \frac{5}{64} \frac{o^4}{a^4} - \frac{1}{2} \frac{pq}{a} - \frac{1}{32} \frac{o^4 p}{a^3} \\ & + \frac{1}{2} \frac{oq}{a^2} + \frac{1}{64} \frac{o^5}{a^4} - \frac{1}{4} \frac{opq}{a} \\ & + \frac{1}{8} \frac{o^2 q}{a^2} + \frac{1}{256} \frac{o^6}{a^4} \\ & + \frac{1}{16} \frac{o^3 q}{a^2} \end{aligned}$$

similiter ad curvam tertii gradus.

Hinc



Hinc videre licet Petrum Fermatium ingeniosissimum quidem Mathematicum, non rectam inivisse viam, cum per duas quarti gradus curvas, æquationem hanc construendam suscepit, nam simplicius intersectione duarum tertii gradus, ejus constructio haberi poterat.

*In Dissert.  
contra Cay-  
tes. part. 2.*

Neque eum excusat æquatio septem dimensionum, quam per curvas tertii gradus postea construxit; nam regula, qua utitur præfatus Author, locum habet in illis æquationibus, in quibus ignota potestas adfectione vacat, aut certis quibusdam terminis afficitur, ut ex eodem Authore facile colligi potest; nequaquam verò in proposita, & similibus æquationibus, sicuti hæc nostra methodus; Quapropter fas sit dicere Fermatium, qui errantem in Geometria Cartesium acutissimè videt, in eum corrigendo etiam cecutire.

*Loc. citat.  
part. 3.*

Eodem artificio perfici possunt constructiones cæterarum æquationum septem, & octo dimensionum, dummodo ad septimum gradum depressæ, ad octavum postea revocentur.

Quòd si pro quadrato ex latere

$$\begin{aligned} x^4 &= \frac{1}{2} ox^3 + \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{4} opx, \\ &\quad - \frac{1}{4} o^2 \quad - \frac{1}{16} o^3 \\ &\quad \quad \quad - \frac{1}{2} g \end{aligned}$$

fin.

Ringatur quadratum ex altero latere

$$\begin{aligned}
 x^4 &= \frac{1}{2} ox^3 + \frac{1}{4} px^2 + \frac{1}{4} opx + \frac{1}{2} r, \\
 &\quad - \frac{1}{8} o^2 \quad - \frac{1}{16} o^3 \quad - \frac{1}{4} oq \\
 &\quad \quad \quad = \frac{1}{2} q \quad + \frac{3}{16} o^2 p \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad - \frac{1}{8} p^2 \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad - \frac{5}{128} o^4
 \end{aligned}$$

ut destruantur quatuor termini propositæ æquationis, nimirum  $ox^3 - px^2 + qx^3 - rx^4$ , invenientur pro constructione æquationis, curvæ quatuor graduum ex una parte, & trium ex altera, hoc est

$$\begin{aligned}
 x^4 &= \frac{1}{2} ox^3 + \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{4} opx + \frac{1}{2} r \quad \text{May} \\
 &\quad - \frac{1}{8} o^2 \quad - \frac{1}{16} o^3 \quad - \frac{1}{4} oq \\
 &\quad \quad \quad = \frac{1}{2} q \quad + \frac{3}{16} o^2 p \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad - \frac{1}{8} p^2 \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad - \frac{5}{128} o^4
 \end{aligned}$$

Et



Et  $\frac{a}{f}x^3 - tx^2 + aux + \frac{1}{4}ar^2 \propto ay^2,$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{8} \frac{op^2}{a^3} + \frac{9}{12} \frac{o^2p^2}{a^3} + \frac{1}{4} \frac{opr}{a} - \frac{1}{4} oqr \\
 & - \frac{5}{16} \frac{o^3p}{a^4} - \frac{15}{128} \frac{po^4}{a^4} - \frac{1}{16} \frac{o^3r}{a^2} + \frac{3}{16} \frac{o^2pr}{a} \\
 & - \frac{1}{4} \frac{pq}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{opq}{a^2} - \frac{1}{2} qr + \frac{1}{16} \frac{o^2q^2}{a} \\
 & + \frac{7}{128} \frac{o^5}{a^5} + \frac{7}{512} \frac{o^6}{a^5} + \frac{1}{4} \frac{oq^2}{a} - \frac{1}{8} p^2r \\
 & + \frac{3}{8} \frac{o^2q}{a^3} + \frac{1}{8} \frac{o^3q}{a^3} - \frac{1}{16} \frac{op^3}{a^2} - \frac{3}{32} \frac{o^3pq}{a^2} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{or}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{q^2}{a} + \frac{1}{8} \frac{p^2q}{a} + \frac{1}{16} \frac{oqp^2}{a} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{pr}{a} + \frac{9}{128} \frac{o^4q}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{ro^4}{a^2} \\
 & - \frac{1}{8} \frac{o^2r}{a^2} - \frac{5}{16} \frac{o^2pq}{a^2} + \frac{5}{256} \frac{qo^5}{a^3} \\
 & - \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^2} + \frac{7}{64} \frac{o^3p^2}{a^3} - \frac{3}{64} \frac{o^2p^3}{a^2} \\
 & - \frac{11}{256} \frac{o^5p}{a^3} + \frac{1}{64} p^4 \\
 & + \frac{5}{1024} \frac{o^7}{a^5} - \frac{15}{1024} \frac{po^6}{a^4} \\
 & + \frac{23}{512} \frac{p^2o^4}{a^3} \\
 & + \frac{25}{16384} \frac{o^8}{a^5}
 \end{aligned}$$

H

Sum:

Sumpta tamen pro communi potestate  $a'y^2$ , nam  
 si poneretur potestas  $a'y^2x^2$ , duæ quatuor graduum  
 curvæ haberentur, nimirum

$$\begin{aligned}
 x^4 - \frac{1}{2} ox^3 + \frac{1}{2} px^2 + \frac{1}{4} opx + \frac{1}{2} r \propto a'yx, \\
 - \frac{1}{8} o^2 - \frac{1}{16} o^3 - \frac{1}{4} oq \\
 - \frac{1}{2} q + \frac{3}{16} o^2p \\
 - \frac{1}{8} p^2 \\
 - \frac{3}{128} o^4
 \end{aligned}$$

Et



ÆQUATIONUM. 59

Et,  $\int x^3 - ax^2 + a^2 x + \frac{1}{4} a^3 x^3 y^2,$

$$- \frac{3}{8} \frac{op^2}{a^2} + \frac{9}{32} \frac{o^2 p^2}{a^2} + \frac{1}{4} opr - \frac{1}{4} aogr$$

$$- \frac{5}{16} \frac{o^3 p}{a^3} - \frac{15}{128} \frac{po^4}{a^3} - \frac{1}{16} \frac{o^3 p}{a} + \frac{3}{16} \frac{o^2 pr}{a}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{pq}{a} - \frac{1}{2} \frac{opq}{a} - \frac{1}{2} aqr + \frac{1}{16} o^2 q^2$$

$$+ \frac{7}{128} \frac{o^5}{a^4} + \frac{7}{512} \frac{o^6}{a^4} + \frac{1}{4} oq^2 - \frac{1}{4} ap^2 r$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{o^2 q}{a^2} + \frac{1}{8} \frac{o^3 q}{a^2} - \frac{1}{16} \frac{op^3}{a} - \frac{3}{32} \frac{o^3 pq}{a}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{or}{a} + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 q + \frac{1}{16} oqp^2$$

$$+ \frac{1}{2} pr + \frac{9}{128} \frac{o^4 q}{a^2} - \frac{5}{128} \frac{ro^4}{a}$$

$$- \frac{1}{8} \frac{o^2 r}{a} - \frac{5}{16} \frac{o^2 pq}{a} + \frac{5}{256} \frac{qo^5}{a^2}$$

$$- \frac{1}{8} \frac{p^3}{a} + \frac{7}{64} \frac{o^3 p^3}{a^2} - \frac{3}{64} \frac{o^2 p^3}{a}$$

$$- \frac{11}{256} \frac{o^5 p}{a^3} + \frac{1}{64} p^4$$

$$+ \frac{5}{1024} \frac{o^7}{a^4} - \frac{15}{1024} \frac{po^6}{a^3}$$

$$+ \frac{23}{512} \frac{p^2 o^4}{a^2}$$

$$+ \frac{25}{16384} \frac{o^8}{a^4}$$

H 2

Quod

Quod indicat destructionem multorum terminorum æquationis, superfluum aliquando esse ad proprium pro constructione locum inveniendum.

At si accidat, ut æquationi ita præparatæ tres illi defint termini, quos destruere necesse habemus, nulla tunc fictio quadrati requiritur. Si verò aliqui ex ipsis in ea deficiant, ita quadrati latus effingere oportet, ut qui supersunt, ejus ope tollantur.

Proponatur construenda æquatio

$x^7 * - 7x^5 * + 14x^3 * - 7x + q \infty 0$ , quæ ortum ducit ex problemate sectionis anguli, sive arcus circuli in septem partes æquales.

Exaltetur ad  $x^8 * - 7x^6 * + 14x^4 * - 7x^2 + qx \infty 0$ , aut  $x^8 \infty * + 7x^6 * - 14x^4 * + 7x^2 - qx$ , vel  $x^8 \infty * + px^6 * - rx^4 * + tx^2 - vx$ , positis pro numero 7 litera  $p$ , pro numero 14 litera  $r$ , pro altero numero 7 litera  $t$ , & pro  $q$  subtenso arcus dati litera  $v$ .

Ad destruendum deinde terminum  $+ px^6$ , formetur quadratum ex latere  $x^4 - \frac{1}{2} px^2$ , scilicet  $x^8 - px^6 + \frac{1}{4} p^2 x^4$ , addaturq; utrique parti æquationis, portio ipsius  $- px^6 + \frac{1}{4} p^2 x^4$ , & habebitur.

$$x^8 - px^6 + \frac{1}{4} p^2 x^4 \infty - rx^4 + tx^2 - vx + \frac{1}{4} p^2$$

Fiat demum utrique parti æqualis potestas  $a^4 y^2 x^2$ , & emergent æquationes  $x^8 - px^6 + \frac{1}{4} p^2 x^4 \infty a^4 y^2 x^2$ , hoc est  $x^4 - \frac{1}{2} px^2 \infty a^2 yx$ , scilicet  $x^3 - \frac{1}{2} px \infty a^2 y$  ad curvam tertii gradus.

$$\text{Et } - rx^4 + tx^2 - vx \infty a^4 y^2 x^2, \\ + \frac{1}{4} p^2$$

id est



ÆQUATIONUM. 61

idest  $= rx^3 + tx - v \propto a^3 y^3 x,$

$+ \frac{1}{4} p^2$

sive  $= a^3 r x^3 + a^5 t x - a^6 v \propto a^4 y^3 x;$

$+ \frac{1}{4} a^2 p^2$

nimirum  $= \frac{r}{a} x^3 + atx - a^2 v \propto y^3 x$

$+ \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2}$

similiter ad curvam tertii gradus.

Sed si pro quadrato ex latere  $x^2 = \frac{1}{2} p x^2$  fingatur

quadratum ex altero latere  $x^2 = \frac{1}{2} p x^2 + \frac{1}{2} r$  ,

$-\frac{1}{8} p^2$

cujus ope evanescunt duo propositæ æquationis termini  $+ p x^6$ , &  $- r x^4$ ; eodem quo supra modo, duæ pro eius constructione curvæ reperientur, verum prior quatuor graduum, & posterior duorum;

nimirum  $x^4 = \frac{1}{2} p x^2 + \frac{1}{2} r \propto a^3 y,$

$-\frac{1}{8} p^2$

&  $\frac{t}{a} x^2 - vx + \frac{1}{4} r^2 \propto y^2,$

$-\frac{1}{2} \frac{pr}{a^2}$

$-\frac{1}{8} \frac{p^2 r}{a}$

$+ \frac{1}{8} \frac{p^3}{a^3}$

$+ \frac{1}{64} \frac{p^4}{a^2}$

posita tamen  $a^6 y^2$  pro communi potestate; nam si ponatur  $a^4 y^2 x^2$ , duæ quatuor graduum curvæ reperientur, scilicet  $x^4 = \frac{1}{2} p x^2 + \frac{1}{2} r \propto a^3 y x,$

$-\frac{1}{8} p^2$

&

$$\begin{aligned}
 & \& atx^2 - a^2vx + a^2r^2 \propto y^2x^2, \\
 & - \frac{1}{2}pr & - \frac{1}{8}ap^2r \\
 & + \frac{1}{8}\frac{p^3}{a} & + \frac{1}{64}p^4
 \end{aligned}$$

Quod similiter arguit proficuum non esse destructionem duorum terminorum ex proposita æquatione ad proprium pro constructione locum inveniendum.

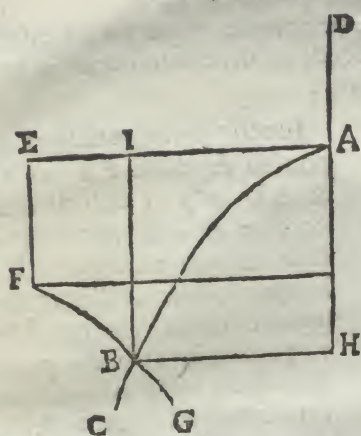
Denique si proponatur æquatio  $x^7 \propto a^6p$ , quæ oritur, dum sex mediæ proportionales inter datas rectas  $a$ , &  $p$  quærantur, facilior etiam constructio reperietur, quia proposita æquatio omni adfectione vacat.

Postquam igitur ad parem est elevata gradum, si utraque ejus pars æquetur potestati  $a^4y^2x^2$ , emergent æquationes  $x^8 \propto a^4y^2x^2$ , hoc est  $x^3 \propto a^4y$  ad cubicam parabolam, &  $a^6px \propto a^4y^2x^2$ , nimirum  $a^2p \propto y^2x$  ad cubicam hyperbolam.

Poterat autem eadem constructio inveniri absque exaltatione æquationis ad parem gradum, posita comparationis potestate  $a^4y^2x$ . Ut præteream, quòd æquatione exaltata, si communis potestas assumeretur  $a^6y^2$ , impropria emergeret constructio per curvas secundi, & quarti gradus, quarum æquationes essent  $px \propto y^2$ , &  $x^4 \propto a^3y$ .

Descri-





Describatur, parametro AD, siue a prima ex datis, cubica parabola ejus proprietatis, ut cubus ordinatæ sit æqualis solido ex quadrato parametri in axis portionē inter verticem, & ordinatam contentam. Rursum, ducta ex A orthogonalī AE  $\propto p$ ,

atque ex E axi parabolæ parallelæ EF, parametro æquali, describatur per F, Asymptotis EA, AH, cubica hyperbola, in qua quadratum datæ EF ad quadratum ex IB, siue AH eandem habeat proportionem, quam BH, siue IA ad AE. Demum ex puncto B, in quo parabola hyperbolam secat, ducatur ordinata ad axim BH; erit hæc propositæ æquationis radix, nimirum prima ex quæsitis mediis, quod ita demonstratur.

Quia  $BH \propto x$ , & per descriptam parabolam,  $AH \propto \frac{x^3}{a^2}$ , ac per hyperbolam, quadratū ex AH, siue IB, hoc est  $\frac{x^6}{a^4}$  ad quadratum ex EF, siue ad  $a^2$  eandem habet rationē, quam recta AE  $\propto p$  ad BH  $\propto x$ , erit  $\frac{x^7}{a^4} \propto a^2 p$ , siue  $x^7 \propto a^6 p$ . Q. E. D.

Quod si cum Petro Fermatio æquetur utrique parti potestas  $py^2x^4$ , alia orietur constructio, ob





tionem, quam BI, five AH ad EF, vel AL, scilicet  
quam  $\sqrt{\frac{x^3}{p}}$  ad  $a$ , erunt quantitates  $a^4 \cdot x^4 \cdot \frac{x^3}{p} \cdot a^3$   
proportionales, nimirum  $a^4$  ad  $x^4$ , ut  $\frac{x^3}{p}$  ad  $a^3$ ,  
ac proinde  $\frac{x^7}{p} \propto a^6$ , five  $x^7 \propto a^6 p$ . Q. E. D.

Atque hæc satis nostræ methodi amplitudinem  
explicant: cæteras altiorum graduum æquationes  
eodem artificio facillimum erit construere, expunctis  
ipsarum terminis usque ad medietatem exponentis  
majoris potestatis, vel infra, prout opportunius ad  
proprium pro constructione locum inveniendum  
existimabitur; scilicet, si æquatio decem fuerit  
dimensionum; ad quinque, aut quatuor, vel infra.

Hæc tamen expunctio terminorum, duplici via  
perfici potest, vel extractione lateris quadrati ex  
proposita æquatione, neglectis residuis, atque  
addito utrique æquationis parti quadrato ex eodem  
latere, dempto primo termino, ut altera ejus pars  
quadratum constituat, sicuti in superioribus egi-  
mus exemplis, vel efformando quadratum ex latere,  
quod efficiat productum simile propositæ æquatio-  
ni, ut ex terminorum respondentium comparatio-  
ne, valor illorum assumpti lateris exurgat, quod  
quidem facillimum est, nec longiori indiget expli-  
catione; nam si ponatur, exempli gratia, æquatio  
sex dimensionum

$$x^6 - px^5 + qx^4 - rx^3 + sx^2 - tx \propto 0;$$

$$\text{five } x^6 \propto px^5 - qx^4 + rx^3 - sx^2 + tx.$$

I

Sum-

Sumpto quadrato ex latere  $x^3 - bx^2 + cx - d$ ,  
 scilicet  

$$x^6 - 2bx^5 + 2cx^4 - 2dx^3 + 2bdx^2 - 2dcx + d^2$$

$$+ b^2 - 2bc + c^2$$

simile hoc erit propositæ æquationi, proptereaque  
 si termini hujus quadrati cum terminis illius com-  
 parentur, aliorum in latere assumptorum valor  
 exurget, & pro latere præfato, habebimus

$$x^3 - \frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}qx - \frac{1}{2}r,$$

$$- \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}pq$$

$$- \frac{1}{16}p^3$$

cujus ope tres æquationis termini evanescunt.



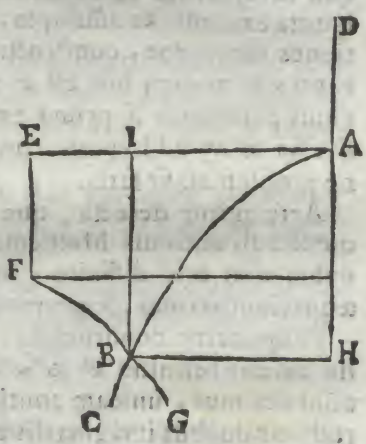


A D  
EXPLICATAS CONSTRUCTIONES  
ADDITAMENTUM.



Radita est universalis Regula construendi æquationes omnes, detegitur nunc Analysis beneficio, hoc in additamento ars, qua fortassè Menæchmus Mathematicus apud veteres celeberrimis, parabola, ac hyperbolæ intersectione, duas medias proportionales invenire poterit, promoveturque hæc doctrina ad constructionem æquationum trium, & quatuor dimensionum, methodo facillima, atquè elegantissima.

Menæchmi constructio ita se habet  
Datis duabus rectis  
DA, & AE ad rectos  
angulos junctis, ver-  
tice A, describatur,  
parabola ABC, cujus  
parameter AD pri-  
ma ex datis, & ex  
termino E ductâ EF  
parallelâ rectæ DAH, F  
& AD æquali, ex F  
puncto, Asymptotis  
EA, AH, describatur  
hyperbola FBG; &  
Quoniam hæc hyper-  
bola in puncto B parabolam secat; si ex eo ad axim  
I 2 du



ducatur ordinata BH, erit hæc prior, & HA posterior quæsitum mediarum, quod ita demonstratur.

Quia propter parabolam, quadratum ex BH æquale est rectangulo ex DA in AH, erunt tres DA, BH, HA continuò proportionales. Similiter quia propter hyperbolam, rectangulum ex FE in EA æquale est rectangulo ex BH in HA, erit ut EF, five DA ad BH, ita HA ad AE, & quoniam per parabolam, DA, BH, HA continuò sunt proportionales, erunt etiam DA, BH, HA, AE continuò proportionales. Q. E. D.

Ars, unde hæc constructio inveniri potuit, sic Analysis beneficio deprehenditur.

Sint data  $a$ , &  $p$ , atque prior ex quæsitis  $x$ ; æquatio problematis naturæ conveniens, erit  $x^3 \propto a^2 p$ .

Ea inventa, si utrique parti æquetur potestas  $axy$ , quæ compositur ex altera datarum, quæsitæ, & alia ignota extrinsecus assumpta, loco unius, duæ æquationes emergent, constructionem quæsitam indicantes  $x^3 \propto axy$ , hoc est  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, cujus parameter  $a$  prima ex datis, &  $a^2 p \propto axy$ , five  $ap \propto xy$  ad hyperbolam, quarum interfectione problemati sic satis.

Arte igitur detecta, qua problema de duabus mediis ab antiquis Mathematicis construi potuit, nobis non erit difficile, methodum ad reliquas æquationes trium, & quatuor graduum extendere.

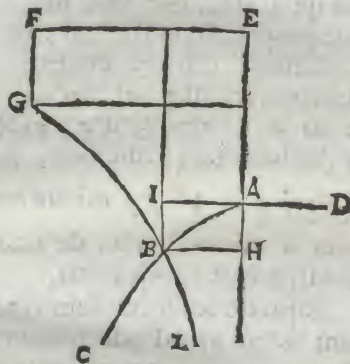
Proponatur construenda cubica æquatio, secundo carens termino  $x^3 \propto * + px + q$ , quæ, ut alibi diximus, unicam continet veram radicem, reliquis duabus imaginariis existentibus.

Sumpta  $a$ , facilitatis gratia pro unitate, fiat  $x^3 \propto * - apx + a^2 q$ , & ponatur utrique parti æqua-



æqualis potestas  $axy$ , emergēt æquationes  $x^3 \propto axy$ ,  
sive  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $-apx + a^2q \propto axy$ ,  
hoc est  $-px + aq \propto xy$ , nimirum  $aq \propto xy + px$  ad  
hyperbolam, ex quibus facillimè constructio dedu-  
citur.

Describatur para-  
bola ABC, cujus pa-  
rameter AD, sive  $a$ ,  
unitati æqualis, su-  
matur deinde in axe  
ultrâ verticem produ-  
cto, portio AE æqua-  
lis  $p$ , & ducatur ex  
puncto E perpendicu-  
laris EF  $\propto q$ ; post-  
modum, ductâ rectæ  
EA parallelâ FG  $\propto a$ ,  
Asymptotis FE, EA,



per G descripta intelligatur hyperbola GBL, quæ  
cùm in B puncto parabolam secet, si ex eo fuerit ad  
axim ducta ordinata BH, hæc erit propositæ æqua-  
tionis radix, quod ita demonstratur.

Quia BH est  $\propto x$ , & AD parabolæ parameter  
 $\propto a$ , sive unitati, erit portio axis AH  $\propto \frac{x^2}{a}$ . Rur-  
sus quia rectangulum ex GF in FE, sive  $aq$  est æqua-  
le rectangulis ex BH in HA, & ex BH, sive IA in  
AE; si ducatur  $\frac{x^2}{a} + p \propto HE$  in  $x \propto BH$ , habebi-  
tur  $\frac{x^3}{a} + px \propto aq$ , scilicet  $x^3 + apx \propto a^2p$ , hoc  
est  $x^3 \propto * - apx + a^2q$ , vel  $x^3 \propto * - px + q$ .  
Q. E. D.

Ali-

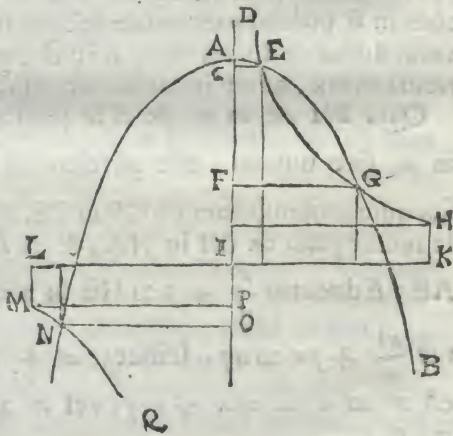
Aliter hoc demonstrari potest ex æquationibus, deductis ab illa, quam primo loco construendam, proposuimus.

Quia BH est  $\propto x$ , & AH posita  $\propto y$ , erit propter parabolam, cujus  $a$  parameter,  $x^2 \propto ay$ . Rursum quia HE, sive HA simul cum AE est  $\propto y + p$ , erit propter hyperbolam,  $xy + px \propto aq$ . Q.E.D.

Eâdem ratione construi poterit æquatio secundæ formulæ  $x^3 \propto * + px + q$ , sive  $x^3 \propto * + apx + a^2q$ , explicabilis de una vera, & duabus falsis radicibus, veræ æqualibus, si solidum  $\frac{2}{3}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{3}p}$  minus non sit solido  $aq$ , sive  $q$ ; nam si minus fuerit, de una vera, & duabus imaginariis erit explicabilis.

Æquationes secundum traditam regulam elicita<sup>æ</sup>,  
sunt  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $px + aq \propto xy$ ,  
five  $aq \propto xy - px$  ad hyperbolam, ex quibus con-  
structio propositæ æquationis pari facilitate habetur.

Describatur pa-  
rabola NAB,  
cujus parame-  
ter AD, sive  
unitas, & portio  
axis AI,  $\propto p$ ;  
deinde, erectâ  
ex pũcto I per-  
pendiculari ad  
axim IL  $\propto q$ ,  
ducatur LM  
ipsi æquidistãs,  
& parabolæ pa-  
rametro æqua.



lis;



lis; Postmodum Asymptotis LI, IP, describatur hyperbola MNQ, quæ cum parabolam in puncto N secet, si ex eo ad axim ordinata NO ducatur, erit hæc vera radix propositæ æquationis.

Rursus ducatur ex puncto I versus alteram parabolæ partem perpendicularis ad axim IK  $\propto q$ , & ex puncto K æquidistans eidem axi KH parabolæ parametro æqualis; Demum Asymptotis KI, IA, describatur ex H puncto opposita hyperbola HGE, & quoniam hæc similiter parabolam in duobus punctis E, G secat, si ex eis ad axim ordinatæ EC, GF ducantur, erunt ejusdem æquationis falsæ radices.

Demonstratio ita se habet.

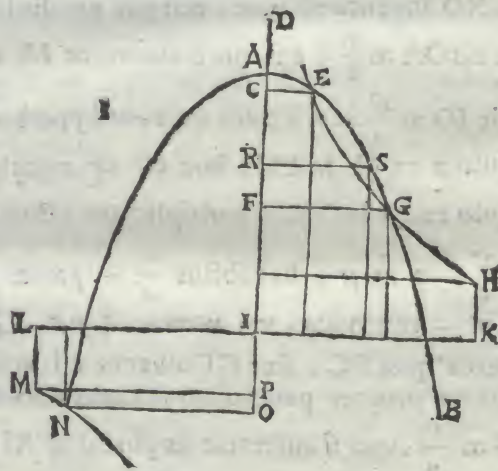
Quia NO inventa est  $\propto x$ , erit per parabolam; portio axis OA  $\propto \frac{x^2}{a}$ , ex qua si auferatur IA  $\propto p$ , supererit IO  $\propto \frac{x^2}{a} - p$ . Rursus quia per hyperbolam, rectangulum ex IL in LM, hoc est  $aq$  æquale est rectangulo ex IO in ON; si multiplicetur IO in ON, hoc est  $\frac{x^2}{a} - p$  in  $x$ , habebitur  $\frac{x^3}{a} - px \propto aq$ , scilicet  $x^3 - apx \propto a^2q$ , vel  $x^3 \propto \frac{a^2q}{a} + px + q$ .

Præterea quia EC, sive GF inventa est  $\propto -x$ , erit similiter propter parabolam, portio axis AC, sive AF  $\propto \frac{x^2}{a}$ , quæ si auferatur ex portione AI  $\propto p$ , relinquetur CI, sive FI  $\propto p - \frac{x^2}{a}$ . Demum quia rectangulum ex HK in KI, nimirum  $aq$  est æquale

re-

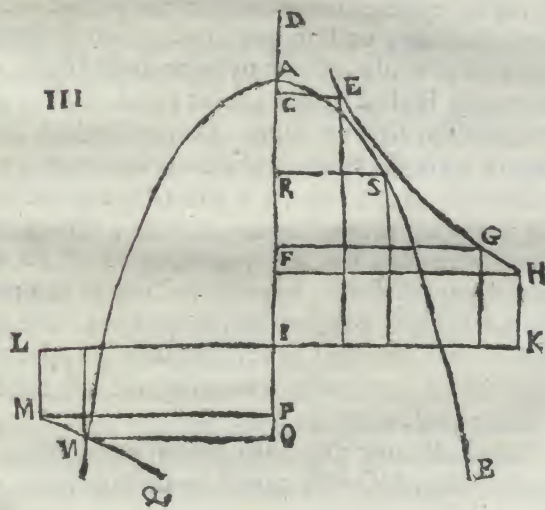
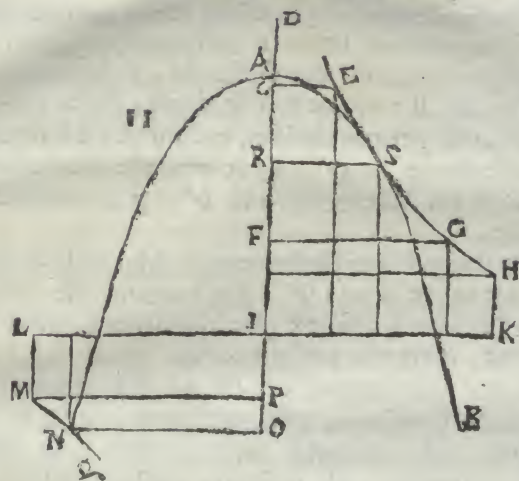
Rectangulo ex EC in CI, five ex GF in FI; si ducatur  $-x$  in  $p - \frac{x^2}{a}$ , habebitur  $-px + \frac{x^3}{a}$   $\propto aq$ , hoc est  $-apx + x^3 \propto a^2q$ , nimirum  $x^3 \propto * + px + q$ . Q. E. D.

Explicatis jam radicibus propositæ æquationis; demonstratur veritas conditionis requisitæ, quod scilicet ad hoc ut proposita æquatio unicam contineat veram radicem, & reliquas falsas, veræ æquales, oporteat solidum  $\frac{2}{3}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{3}p}$  non minus esse solido  $q$ , aliter si minus fuerit, unicam veram, & reliquas imaginarias continebit.



Quo-





K

Quo-

Quoniam cognita quantitas tertii termini propositæ æquationis litera  $p$  designata, æqualis fuit posita portioni axis parabolæ  $AI$ , si hæc ita in  $R$  secetur, ut  $IR$  reliquæ  $RA$  sit dupla, ducta ordinata  $RS$ , erit per parabolam, parametro unitatem representante,  $\propto \sqrt{\frac{1}{4}p}$ , ac proinde productum ex  $IR$  in  $RS$ , scilicet  $\frac{3}{4}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{4}p}$  solidum designabit.

Rursus quia per doctrinam de Maximis deducitur factum ex  $\frac{3}{4}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{4}p}$  maximum esse solidorum omnium, quæ ex hac quantitatis notæ divisione formari possunt, & quia solidum hoc per productum ex  $IR$  in  $RS$  denotatur, sequitur maximum esse omnium, quæ ex ordinatis ad parabolæ axim ductis, & ipsius axis segmento, ab ordinata infra verticem intercepto, concipiuntur, maximum nempe solidorum omnium, eodem quo supra modo designatorum, ac proinde, ad hoc ut hyperbola  $HGE$ , quæ ex puncto  $H$  describitur, secet parabolam in duobus punctis, alterum supra, alterum infra  $S$ , nimirum in  $E$ , &  $G$ , requiritur, ut productum ex  $IR$  in  $RS$ , hoc est solidum ex  $\frac{3}{4}p$  in  $\sqrt{\frac{1}{4}p}$  majus sit ultimo termino propositæ æquationis, scilicet solidum  $q$ , sive  $aq$ , hoc est productum ex  $IK$  in  $KH$ ; nam si minus foret, hyperbola, neque tangeret, neque secaret parabolam, & radices falsæ evaderent imaginariæ; si verò æquale, hyperbola parabolam in puncto  $S$  contingeret, & falsæ radices æquales inter se fierent.

Supereft nunc demonstrandum veram æquationis radicem  $NO$  esse æqualem duabus falsis  $CE$ ,  
 $FG$



FG simul sumptis, quod, & defectus secundi termini satis indicat.

Positis  $CE \propto x$ ,  $FG \propto y$ ,  $NO \propto z$ , & reliquis, Fig. I.  
ut supra, Quia propter hyperbolam, rectangulum ex EC in CI æquale est rectangulo ex IK in KH,

erit  $px - \frac{x^3}{a} \propto aq$ , scilicet  $apx - x^3 \propto a^2q$ .

Quia similiter rectangulum ex FI in FG æquale est eidem rectangulo ex IK in KH, hoc est  $py$

$-\frac{y^3}{a} \propto aq$ , sive  $apy - y^3 \propto a^2q$ , habebitur  $apy$

$-y^3 \propto apx - x^3$ , scilicet  $apy - apx \propto y^3 - x^3$ , &

facta divisione per  $y - x$ , fiet  $ap \propto y^2 + yx + x^2$ .

Rursum quia rectangulum ex IP in PM æquale est rectangulo ex IO in ON, tertia invenietur æqua-

tio  $\frac{z^3}{a} - pz \propto aq$ , hoc est  $z^3 - apz \propto a^2q$ , &

proinde erit  $z^3 - apz \propto apx - x^3$ , idest  $z^3 + x^3$

$\propto apz + apx$ , & divisa æquatione per  $z + x$ , ha-

bebitur  $ap \propto z^2 - zx + x^2$ , ac propterea

$z^2 - zx + x^2 \propto y^2 + yx + x^2$ , & deleta com-

muni quantitate  $x^2$ , supererit  $z^2 - zx \propto y^2 + yx$ ,

sive  $z^2 - y^2 \propto yx + zx$ , & iterum facta divi-

sione per  $z + y$ , habebitur  $x \propto z - y$ , scilicet

$z \propto x + y$ , hoc est NO æqualis EC insimul cum

GF. Q. E. D.

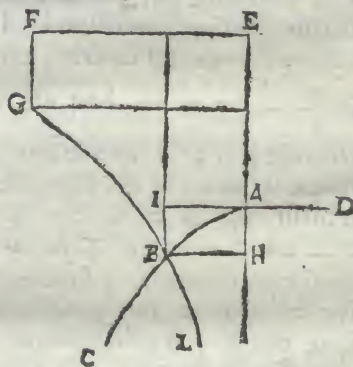
Eadem ratione construi poterit æquatio tertiæ formulæ  $x^3 \propto * + px - q$ , de tribus explicabilis radicibus, converso tamen ordine, duabus scilicet veris, & una falsa, veris æquali, vel una falsa, & duabus imaginariis, atque ex constructione demonstratio est manifesta, ex qua etiam patet parabolæ, & hyperbolæ intersectione construi

K 2                      pro-

problema de anguli, five arcus circuli sectione in tres partes æquales, posito circuli semidiametro  $\propto a$ , five unitati pro parabolæ parametro, BI axis portione  $\propto p$ , subtenfa dati arcus  $\propto q$ , five IK, & quaeriti  $\propto x$ .

Eadem similiter ratione construetur æquatio  
 $x^2 \propto x - px - q$ , de unica tantum falsa radice  
 explicabilis.

Invenitis enim duabus æquationibus  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $-px - aq \propto xy$ , hoc est  $-px - xy \propto aq$  ad hyperbolam, si describatur pro constructione parabola ABC, cujus parameter  $a$  sive unitas, & axis suprà verticem ad E producatur, ita ut AE sit  $\propto p$ , postea ducta EF ad AE perpendiculari, si agatur ex F puncto recta FG  $\propto a$  parallela axi, atque, Asymptotis FE, EA, ex puncto G hyperbola GBL describatur, erit



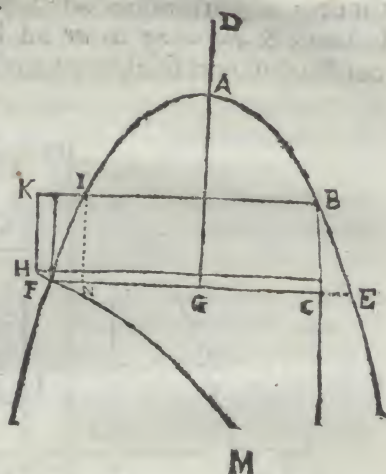
ordinata BH ducta ex pūcto interfectionis parabola, & hyperbolæ, falsa radix propositæ æquationis.

Demum si construenda proponatur æquatio  
 $x^3 \propto px^2 + r$ , de unica tantum vera radice  
 explicabilis, exposita methodo inveniuntur æqua-  
 tiones  $x^2 - px \propto ay$  ad parabolam, &  $ar \propto xy$   
 ad hyperbolam, ex quibus constructio facillimè  
 deducitur.

De-



Describatur parabola FAE, cujus parameter AD, siue unitas  $\propto a$ , axis AG, & parallela BC ab axi distans quantitate  $\frac{1}{2} p$ ; Rursus, Asymptotis CB, BIK, describatur ex puncto H, hyperbola HFM, positis BIK  $\propto r$ , & KH  $\propto a$ , siue AD parabolæ parametro, & quoniam hæc curva in



puncto F parabolam secat; si ex eo ad BC axi parabolæ parallelam, orthogonalis FC fuerit ducta, erit propositæ æquationis vera radix, quod ita demonstratur.

Quia FC est  $\propto x$ , & NC, siue IB posita  $\propto p$ ; erit FN, siue CE  $\propto x - p$ ; Rursus quia propter parabolæ proprietatem apud Pappum demonstratam, est  $\frac{x^2 - px}{a} \propto BC$ , habebitur per hyperbolam In fin. lib. 4.

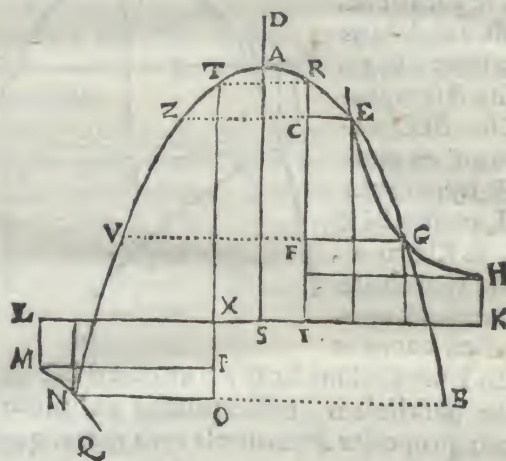
$\frac{x^3 - px^2}{a} \propto ar$ , hoc est  $x^3 - px^2 \propto a^2 r$ , nimirum

$x^3 \propto px^2 + r$ . Q. E. D.

Præterea si proponatur cubica æquatio, in qua nullus deficit terminus, videlicet  $x^3 \propto -px^2 + qx - r$ , de tribus explicabilis radicibus; majori falsa, & reliquis veris, inventis juxta metho-

78 AD EXPLIC. CONSTRUCT.

thodum æquationibus  $x^2 + px \propto ay$  ad parabola-  
bolam, &  $qx - xy \propto ar$  ad hyperbolam, ejus  
constructio pari facilitate habebitur.



Describatur parabola NAB, cujus axis AS,  
& parameter AD, sive  $a$  unitati æqualis, ducatur-  
que ex puncto R distante ab axi per  $\frac{1}{2}p$ , recta  
RI axi parallela, & æqualis  $q$ , producat postea  
SI usque ad K, ita ut IK sit æqualis  $r$ , & ducta  
ex puncto K, recta KH  $\propto a$ , diametro, vel axi pa-  
rallela, asymptotis RI, IK, ex puncto H describa-  
tur hyperbola HGE, quæ parabolam in duobus  
punctis G, E secare poterit, ex quibus, si ad RI  
axi parallelam, fuerint ductæ orthogonales GF,  
EC, erunt propositæ æquationis veræ radices, quæ  
si æquales inter se fuerint, descripta hyperbola  
para-



parabolam tanget, si verò imaginariæ, neque tanget, neque secabit.

Rursus ducatur ex altera parte TX æqualis  $q$ , distans similiter ab axe per  $\frac{1}{2}p$ , & producat SX in L, ita ut XL sit æqualis  $r$ , postmodum, ducta ex puncto L recta LM axi, vel diametro parallela  $\propto a$ , describatur per M punctum, Asymptotis LX, XO, opposita hyperbola MNQ, & quoniam parabola ab hac curva in puncto N secatur, si ex eo orthogonalis NO fuerit ducta, erit illa æquationis falsa radix, quod ita demonstratur.

Quia EC, vel GF est  $\propto x$ , erit ZC, vel VF  $\propto x + p$ ; similiter quia propter parabolam, RC, vel RF est  $\propto \frac{x^2 + px}{a}$ , si hæc ab RI auferatur,

supererit portio CI, vel FI  $\propto q - \frac{x^2 - px}{a}$ .

Demum quia propter hyperbolam, rectangulum ex EC in CI, vel ex GF in FI æquale est rectangulo ex IK in KH, erit  $qx - \frac{x^2 - px^2}{a} \propto ar$ , scilicet  $aqx - x^3 - px^2 \propto a^2r$ , hoc est  $x^3 \propto -px^2 + qx - r$ .

Rursus quia NO est  $\propto -x$ , & rectangulum ex parabolæ parametro, & TO axi parallela, hoc est ay est æquale rectangulo ex NO in OB, scilicet  $px + x^2$ , erit OB  $\propto -p - x$ , & TO, sive y  $\propto \frac{px + x^2}{a}$ ; si igitur ex TO auferatur TX  $\propto q$ ,

quæ superest portio XO, erit  $\propto \frac{px + x^2}{a} - q$ , ac propterea per hyperbolam, rectangulum ex NO  
in

80 AB EXPLIC. CONSTRUCT.

in OX æquale rectangulo ex ML in LX, idest

$$-\frac{px^2 - x^3}{a} + qx \propto ar, \text{ scilicet } -px^2 - x + aqx \propto a^2r, \text{ hoc est } x^3 \propto -px^2 + qx - r.$$

Q. E. D.

Atque hæc de cubicis æquationibus dicta sufficiant, progrediamur nunc ad constructionem æquationum quatuor graduum.

Proponatur æquatio secundo carens termino  $x^4 \propto * + qx^2 - rx + f$ .

Assumpta  $a$  pro unitate, erit  $x^4 \propto * + aqx^2 - a^2rx + a^2f$ .

Posita deinde æquali utrique parti potestate  $a^2y^2$ , habebitur  $x^4 \propto a^2y^2$ , hoc est  $x^2 \propto ay$  ad parabolam, &  $aqx^2 - a^2rx + a^2f \propto a^2y^2$ , scilicet  $\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2$  ad hyperbolam.

Rursus proponatur æquatio omnibus constans terminis  $x^4 \propto px^3 + qx^2 - rx + f$ .

Transmutetur hæc in  $x^4 - px^3 \propto aqx^2 - a^2rx + a^2f$ , posita, ut suprâ,  $a$  pro unitate.

Addatur deinde utrique parti quadratum ex  $\frac{1}{2} px$ , hoc est  $\frac{1}{4} p^2 x^2$ , ut pars æquationis  $x^4 - px^3$  quadratum constituat, eritque igitur  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 \propto aqx^2 - a^2rx + a^2f + \frac{1}{4} p^2$ .

Æquetur postmodum utrique parti  $a^2y^2$ , & habebitur  $x^4 - px^3 + \frac{1}{4} p^2 x^2 \propto a^2y^2$ , scilicet  $x^2 - \frac{1}{2} px \propto ay$  ad parabolam, &  $aqx^2 - a^2rx + \frac{1}{4} p^2 \propto a^2y^2$ , nimirum  $\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2$  ad hyperbolam.

hyperbolam,  $+\frac{1}{4} \frac{p^2}{a^2}$

Ea



Eadem ratione erui poterunt æquationes ad curvas, constructioni cæterarum æquationum infervientes, sed notandum hyperbolam ex altera æquatione deductam, hic non describi, datis asymptotis, sicuti in cubicis, sed datis axe, vertice, latere recto, & transverso, ut ex inventa æquatione  $\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2$ , sive  $qx^2 - arx + a^2f \propto ay^2$ , vel  $x^2 - \frac{arx}{q} + \frac{a^2f}{q} \propto \frac{ay^2}{q}$  facili negotio percipi potest.

Si enim auferatur secundus terminus ex ea parte, in qua  $x^2$  reperitur, posita  $z \propto x - \frac{1}{2}\frac{ar}{q}$ , sive  $z + \frac{1}{2}\frac{ar}{q} \propto x$ , habebitur æquatio  $z^2 - \frac{1}{4}\frac{a^2r^2}{q^2} + \frac{a^2f}{q} \propto \frac{a}{q}y^2$  ad hyperbolam, cujus vertex A, transversum latus AF

$$\propto \sqrt{-\frac{a^2r^2}{q^2} + \frac{4a^2f}{q}},$$

hoc est æqualis duplo lateris ex plano

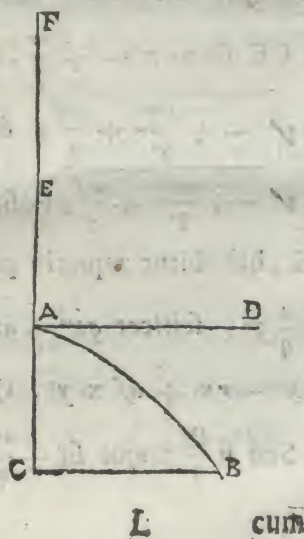
$$-\frac{1}{4}\frac{a^2r^2}{q^2} + \frac{a^2f}{q}, \text{ rectũ}$$

$$\text{latus AD} \propto \sqrt{-r^2}$$

+  $4fq$ , quartæ nimirum proportionali in ordine trium quantitatum  $a$ .  $q$ . &

$$\sqrt{-\frac{a^2r^2}{q^2} + \frac{4a^2f}{q}},$$

portio axis CA unà



cum dimidio transversi lateris AE, scilicet CE  
 $\propto z$ , & CB ordinata  $\propto y$ , quod ita demonstra-  
 tur.

Quia CE est  $\propto z$ , FE, five EA  $\propto \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}}$ , erit FC  $\propto z + \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}}$ , & CA  
 $\propto z - \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}}$ . Rursus quia propter  
 hyperbolam, rectangulum ex FC in CA se habet  
 ad quadratum ex CB, scilicet  $z^2 - \frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}$   
 ad  $y^2$ , ut  $\sqrt{-\frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{4a^2 f}{q}}$  ad  $\sqrt{-r^2 + 4sq}$ ,  
 hoc est, ut  $a$  ad  $q$ , erit  $z^2 - \frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} \propto \frac{ay^2}{q}$ ; pro-  
 pterea, si pro  $z$  sumatur valor ipsius  $x - \frac{1}{2} \frac{ar}{q}$ , ita  
 ut CE sit  $\propto x - \frac{1}{2} \frac{ar}{q}$ , erit FC  $\propto x - \frac{1}{2} \frac{ar}{q}$   
 $+ \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}}$ , & CA  $\propto x - \frac{1}{2} \frac{ar}{q}$   
 $- \sqrt{-\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2} + \frac{a^2 f}{q}}$ ; Positis igitur reliquis, ut su-  
 præ, habebitur æquatio proposita  $x^2 - \frac{arx}{q} + \frac{a^2 f}{q}$   
 $\propto \frac{a}{q} y^2$ , scilicet  $qx^2 - arx + a^2 f \propto ay^2$ , hoc est  
 $\frac{q}{a} x^2 - rx + af \propto y^2$ ; Q.E.D.

Sed si  $\frac{a^2 f}{q}$  major sit  $\frac{1}{4} \frac{a^2 r^2}{q^2}$ , ita ut quantitas

$-\frac{1}{4}$



$-\frac{1}{4}\frac{a^2r^2}{q^2} + \frac{a^2f}{q}$  post quadratum ignotum  $z^2$ , signo  
+ reperiatur adfecta, non dissimili modo hyper-  
bola manifestabitur, nam æquatio  $z^2 - \frac{1}{4}\frac{a^2r^2}{q^2}$

$+ \frac{a^2f}{q} \propto \frac{a}{q}y^2$ , transpositionis beneficio fiet  $z^2$   
 $\propto \frac{a}{q}y^2 + \frac{1}{4}\frac{a^2r^2}{q^2} - \frac{a^2f}{q}$ .

At si transpositione uti nolumus, pari facilitate  
hyperbola habebitur per regulam, à Fermatio in-  
dicatam. *In sua Ifag.  
ad loc. plan.  
& Sol.*

Notandum tamen est aliquando pro hyperbola  
ellipsim, vel circulum inveniri posse, quod accide-  
re videmus, cum proposita æquationis tertius ter-  
minus signo - reperitur adfectus, ut colligi potest  
ex æquatione  $x^4 \propto * - qx^2 + rx + f$ , vel ex  
 $x^4 \propto - px^3 - qx^2 - rx + f$ , five  $x^4 + px^3 \propto$   
 $- qx^2 - rx + f$ , ex quibus deductæ juxta me-  
thodum, sunt  $x^2 \propto ay$ , vel  $x^2 + \frac{1}{2}px \propto ay$ ,  
utraque ad parabolam, &  $-\frac{q}{a}x^2 + rx + af \propto y^2$ ,  
vel  $-\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2$  ad ellipsim, vel cir-  
culum.  
 $+ \frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2}$

Propterea si pro ellipsi, vel circulo hyperbola  
quærat, utrique parti ejus æquationis, in qua re-  
peritur  $-\frac{q}{a}x^2$ , addatur duplum ejusdem quanti-  
tatis

84 AD EXPL. CONSTR. ADDIT.

tatis signo + adfectum, ad hoc ut vertatur in +,  
scilicet  $+\frac{2q}{a}x^2$ , & habebitur  $+\frac{q}{a}x^2 + rx + af \propto y^2$   
 $+\frac{2q}{a}x^2$ , vel  $+\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2 + \frac{2q}{a}x^2$ .  
 $+\frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2}$

Deinde loco  $x^2$  ponatur ejus valor  $ay$ , vel  $ay$   
 $-\frac{1}{2}px$ , ductoque hoc, vel illo valore, pro ut  
opus requirit, in  $+\frac{2q}{a}$ , emergent  $+\frac{q}{a}x^2 + rx$   
 $+ af \propto y^2 + 2qy$ , vel  $+\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2$   
 $+\frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2}$

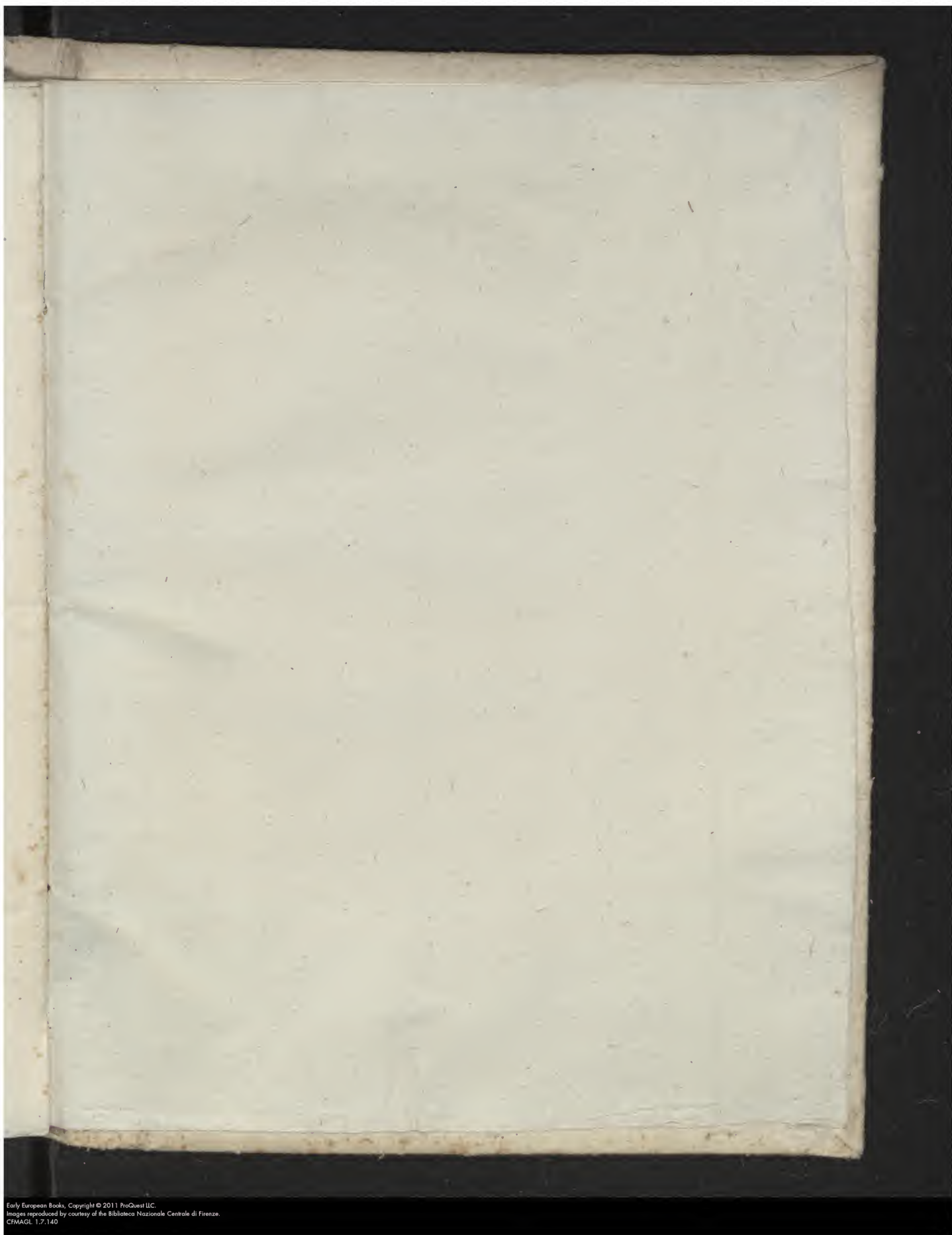
$+ 2qy - \frac{qp}{a}$ , hoc est  $+\frac{q}{a}x^2 - rx + af \propto y^2 + 2qy$ ,  
 $+\frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2} + \frac{qp}{a}$

utraque ad hyperbolam.

De æquationum constructione plura quàm initio  
constitueram congeffi, alia addere, hominis otio  
abutentis munus, non injuriâ quis posset interpre-  
tari, sicuti enim æquationum gradus nullis finibus  
coercetur, ita methodus in infinitum esset exten-  
denda; quæ verò jam sunt explicata, satis, superque  
methodi amplitudinem, & facilitatem ostendunt,  
apud doctos viros commendatione non egent, illi  
enim probè norunt judicium, quod de his ferri de-  
bet, ab aliis autem velim nostra hæc studia, ne prius  
quàm sint intellecta, contemnantur.

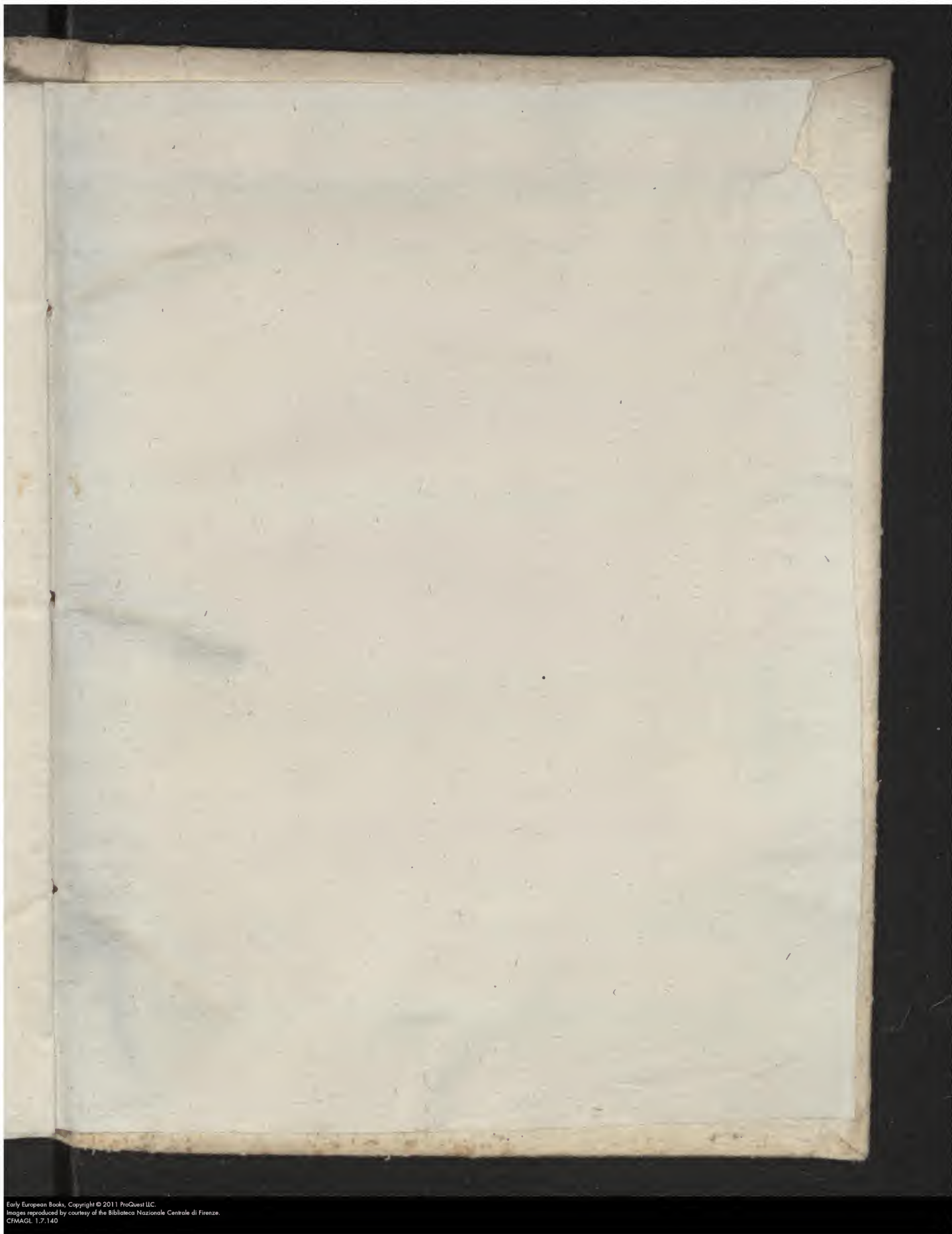
F I N I S.

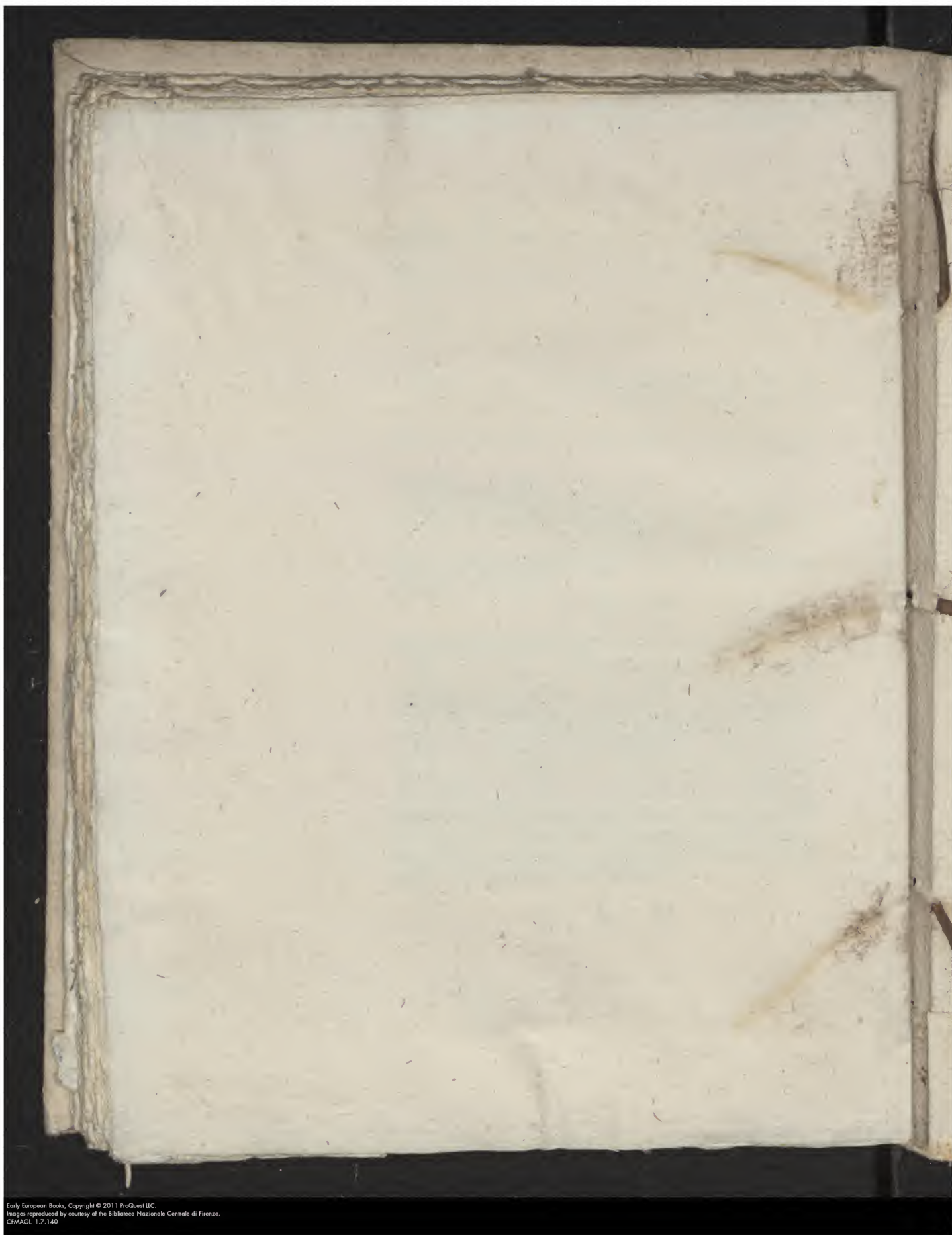














00564421